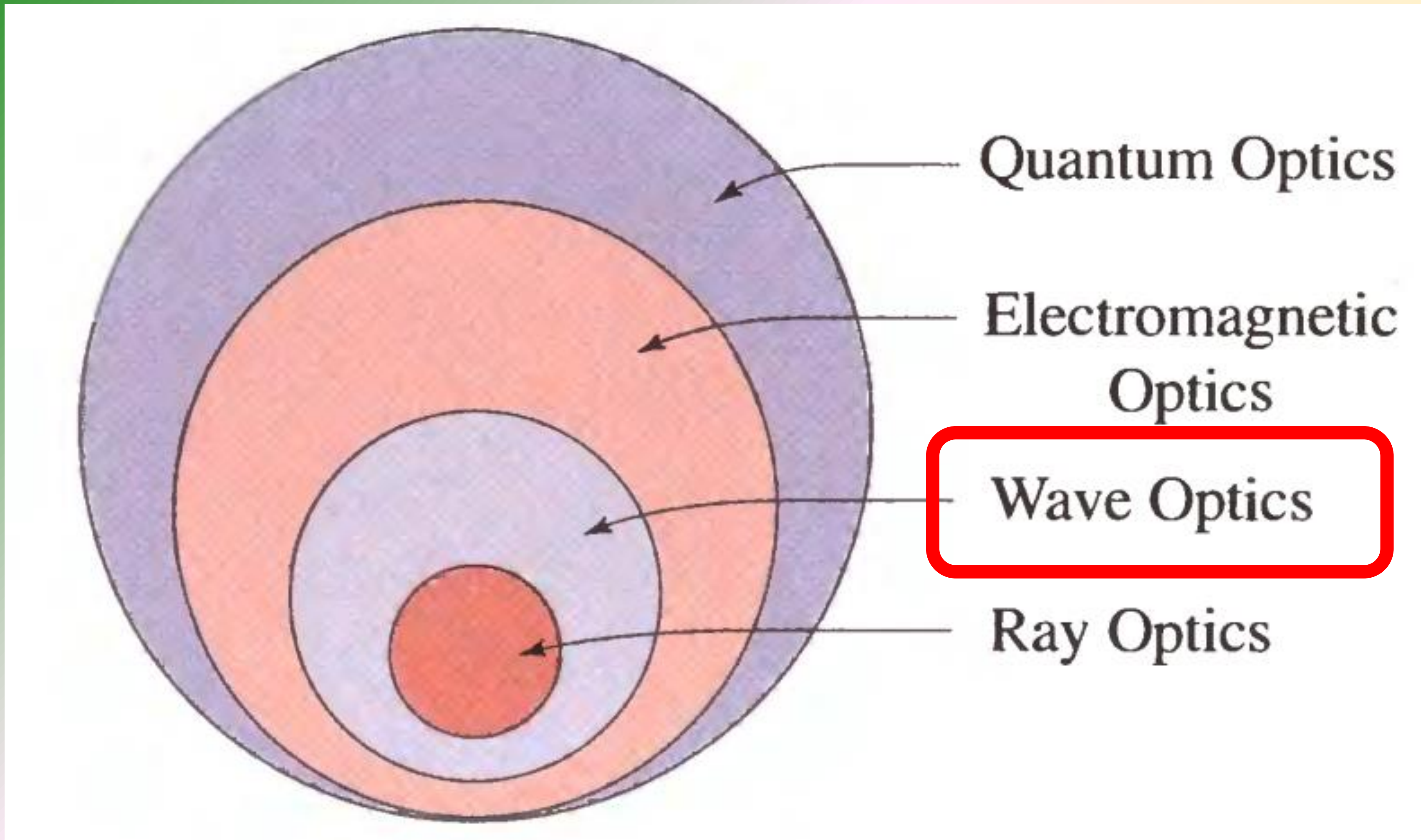
Ondas Electromagnéticas

Ondas, feixes gaussianos, difracção, propagação

Saleh B.E.A., Teich M.C., Fundamentals of Photonics (ch. 2 & 3)
J. W. Goodman, Introduction to Fourier Optics (ch. 2, 3, 4, 5)
Hecht E., Optics (5ª ed.), (Cap. 7, 10)
http://www.chegg.com/homework-help/optics-5th-edition-chapter-n-solutions-***
Imagens disponíveis na internet

J. M. Rebordão

Níveis de aproximação em EM



Objectivos de aprendizagem: Ondas EM

1. Linearidade da **equação de ondas** e sua importância na geração de soluções complexas com base em combinações lineares de soluções simples.
2. A aproximação da óptica ondulatória deve ser bem entendida: se todas as componentes dos campos **E** e **B** satisfazem a mesma equação de ondas, então uma solução genérica da equação de ondas, u(**r**,t) terá um potencial explicativo relevante.
3. A **irradiância** (observável), em W/m^2, é dada por $2\langle|u(\mathbf{r},t)|^2\rangle$, de modo a garantir coerência com os modelos decorrentes do vector de Poynting, em óptica electromagnética.
4. De entre as soluções **escalares**, u(**r**,t) da equação de ondas, serão particularmente úteis as que, num dado ponto, **r**, forem **periódicas** no tempo. Daqui decorre a equação de **Helmholtz** e a **Amplitude Complexa**, U(**r**). Daqui decorre também a noção de onda **monocromática** e – dada a linearidade da equação de ondas – o modelo usual para ondas **policromáticas**.
5. As soluções monocromáticas mais simples da equação de Helmholtz são as ondas **planas** e as ondas **esféricas** – e suas aproximações, as **paraboloidais**. Admitindo que a amplitude das ondas monocromáticas possa variar lentamente com z, obtém-se as ondas **paraxiais**. Admitindo que a amplitude das ondas monocromáticas possam variar em (x,y) – mas não em z - obtém-se as ondas de **Bessel**.
6. As ondas **gaussianas** são casos especialmente relevantes de ondas paraxiais. Não só têm uma irradiância transversa gaussiana como admitem soluções de “ordem” elevada, associadas a polinómios de Hermite e de Legendre, que impõem os seus zeros às gaussianas.
7. Os parâmetros que caracterizam as ondas planas, esféricas, paraxiais, gaussianas, bem como o cálculo da Amplitude Complexa (em módulo e em fase) em qualquer plano à distância z do plano da fonte, devem ser bem conhecidos, bem como a distinção entre as soluções exactas da equação de Helmholtz e as soluções da equação de **Helmholtz paraxial**.

Ondas: Equações (lineares)

Maxwell

Sem cargas ($\rho = 0$) nem correntes (**J** = **0**)

$$\nabla \times \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \mathcal{D} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0.$$

$$\mathcal{D} = \epsilon_o \mathcal{E} + \mathcal{P}$$
$$\mathcal{B} = \mu_o \mathcal{H} + \mu_o \mathcal{M}.$$

$$\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E}$$
$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{E})$$
$$\mathcal{P} = \varepsilon_0 \mathcal{X} \mathcal{E}$$
$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{H})$$

Ondas

As 6 componentes de **E** e de **H** satisfazem uma ***mesma*** equação de 2ª ordem:

E_i ou H_j → u(r,t)

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

As suas soluções **não são necessariamente** soluções das Equações de Maxwell (1ª ordem)

Helmholtz

Equação de ondas para ondas **monocromáticas**

$$e^{i\omega t} = e^{i2\pi\nu t}$$

$$U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) \exp(j2\pi\nu t)$$

$$(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{r}) = 0$$

$$k = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c}$$

Ondas paraxiais

Propagação "essencialmente" ao longo e "próximo" do ***Eixo dos ZZ***

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp(-jkz)$$

$$\nabla_T^2 A - j2k\frac{\partial A}{\partial z} = 0.$$

Equação de ondas no **vazio**

-Aplicando o rotacional a cada equação rotacional,

-Usando a identidade vectorial:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla . \mathbf{E}) - \nabla^2(\mathbf{E})$$

-Aplicando a outra equação rotacional e uma das equações sobre a divergência, obtem-se:

$$\boxed{\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$$

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}.}$$

No vazio:

$c = c_0 \approx 3 \times 10^8$ m/s

u(**r,t**) traduz **qualquer uma das 6 componentes** do campo EM.

-A eq. de ondas é linear → **princípio da sobreposição**

-Pode ser resolvida isoladamente (aproximação escalar do EM) ou apenas constituir uma condição necessária a que qualquer solução das eq. de Maxwell tem de satisfazer.

Óptica ondulatória: postulados

A luz propaga-se sob forma de **ondas escalares**.

A **velocidade de propagação,** *c***,** num meio de índice ***n*** é:

$$c = \frac{c_o}{n}$$

No vazio, $n = 1$ e $c = c_0$

Uma onda é descrita por uma função **real**, u(**r**,t), **r=**(x,y,z) que satisfaz a equação de ondas (linear):

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Na fronteira entre dois meios, $u(\mathbf{r},t)$ varia de acordo com os índices dos dois meios. Todavia, a repartição dos fluxos só pode ser analizada pela óptica electromagnética.

A equação de ondas mantém-se válida em **meios não homogéneos**, desde que o índice de refracção $n(\mathbf{r})$ – logo $c(\mathbf{r})$ - varie lentamente.

Irradiância, Potência e Energia: Óptica ondulatória

A **Irradiância óptica** $E(\mathbf{r},t)$ – fluxo óptico por unidade de área, em **Wm^{-2}** , define-se como:

$$E(\mathbf{r},t) = 2\langle u^2(\mathbf{r},t)\rangle$$

Infelizmente o símbolo para a **Irradiância** no SI é:

E

Unidades: W / m^2

O valor médio [<>] é calculado durante um intervalo de tempo **>> período** da onda (~2x10^{-15} s, @ λ = 600 nm).

O Fluxo, *P*, (em W) através de uma área *A* perpendicular à direcção de propagação é:

$$P(t) = \iint_A E(\mathbf{r},t)\,d\boldsymbol{A}$$

A **Irradiância, *E*, [Wm^{-2}]** é um **observável**.

(Ondas e Radiometria)

- A maior parte dos livros refere-se ao fluxo de energia associada à radiação EM em termos da **intensidade, $I \sim E^2$**

- Este **I** tem unidades de **W/m^2**: é uma **Irradiância !**

- Em EM, estabelece-se que a quantidade **$S = E \times H$**

(**vector de Poynting**) representa o fluxo (instantâneo) da energia EM através de uma área unitária cuja normal é paralela a **S**.

- **S** oscila à frequência ν para uma onda plana monocromática.

- A média temporal de **S** ao longo de um período representa a taxa efectiva de propagação de energia do campo EM.

- Para uma onda plana (polarização linear), a média temporal de **S** (em **W/m^2**) é:

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\, E_o^2\, \boldsymbol{k}$$

No vazio:

$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}$ farad/m

$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ henry/m

Equação de Ondas: ondas monocromáticas

Será que a EO suporta funções reais periódicas no tempo? Sim. Forma geral:

$$u(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \cos[2\pi\nu t + \varphi(\mathbf{r})]$$

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Amplitude $a(\mathbf{r})$ e **Fase espacial** φ ($\mathbf{r}$): podem depender, em geral, de **r**.

Frequência ν de uma onda *luminosa*: ~ $3 \times 10^{11} - 3 \times 10^{16}$ Hz.

A função de onda **real,** $u(\mathbf{r},t)$**,** pode ser escrita de forma ainda mais geral sob a forma ***complexa,*** $U(\mathbf{r},t)$ – que também satisfaz a equação de ondas:

$$U(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \exp[j\varphi(\mathbf{r})] \exp(j2\pi\nu t)$$

$$U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) \exp(j2\pi\nu t)$$

$$U(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) \exp[j\varphi(\mathbf{r})]$$

Amplitude Complexa

$$u(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}\{U(\mathbf{r}) \exp(j2\pi\nu t)\} = \tfrac{1}{2}[U(\mathbf{r}) \exp(j2\pi\nu t) + U^*(\mathbf{r}) \exp(-j2\pi\nu t)].$$

Equação de Ondas: Amplitude Complexa

A **Amplitude complexa** $\boxed{U(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r})\exp[j\varphi(\mathbf{r})]}$ satisfaz a **equação de Helmoltz**:

$$\boxed{(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{r}) = 0} \qquad \boxed{k = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c}}$$

Relação de dispersão

$\omega = \omega(k)$

A **Irradiância óptica**, que se calcula com $E(\mathbf{r},t)=2\langle u^2(\mathbf{r},t)\rangle$, é:

$$\begin{aligned} 2u^2(\mathbf{r},t) &= 2a^2(\mathbf{r})\cos^2\left[2\pi\nu t + \varphi(\mathbf{r})\right] \\ &= |U(\mathbf{r})|^2\left\{1 + \cos\left(2\left[2\pi\nu t + \varphi(\mathbf{r})\right]\right)\right\}. \end{aligned}$$

Média sobre grande número de períodos: $E(\mathbf{r}) = |U(\mathbf{r})|^2 = a(\mathbf{r})^2$

Frentes de onda são **superfícies de igual fase**, $\varphi(\mathbf{r})=c^{te}$.

As normais à frentes de onda, grad $\varphi(\mathbf{r})$, representam as direcções ao longo das quais a fase varia mais rapidamente - os raios luminosos, da óptica geométrica.

Resumindo:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

u(r,t)

Ondas monocromáticas

$$u(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \cos[2\pi\nu t + \varphi(\mathbf{r})]$$

$$U(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \exp[j\varphi(\mathbf{r})] \exp(j2\pi\nu t)$$

$$(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{r}) = 0$$

$$U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) \exp(j2\pi\nu t)$$

Relação de Dispersão
ω=ω(k)

$$k = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c}$$

$$U(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) \exp[j\varphi(\mathbf{r})]$$

Amplitude complexa

$$\nabla_T^2 A - j2k\frac{\partial A}{\partial z} = 0$$

Aproximação paraxial

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp(-jkz)$$

Resolução da EH por separação de variáveis

Equação de Helmoltz:

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$$

Procuremos, em coordenadas cartesianas, soluções da forma X(x)Y(y)Z(z) Existirão?

A EH toma a forma:

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2} + XZ\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2} + k^2XYZ = 0.$$

Dividindo por XYZ e rearranjando:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} - \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} - k^2.$$

1º membro só é função de x. O 2º só é função de y e z. Logo, ambos têm de ser iguais a uma constante.
Fazendo o mesmo para o 2º membro, obtem-se:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -l^2, \quad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -m^2, \quad \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -n^2,$$

$$k^2 = l^2 + m^2 + n^2.$$

*A solução em variáveis separadas **existe**:*

$\psi_{lmn}(x,y,z) = X_l(x)\, Y_m(y)\, Z_n(z)$

A solução **geral** da EH será:

$\psi(x,y,z) = \sum a_{lmn}\,\psi_{lmn}(x,y,z)$

Terá significado **físico**?

As 3 equações deixam-se resolver facilmente (oscilador harmónico) → **Ondas Planas**

A separação de variáveis também pode ser feita em coordenadas esféricas → **Ondas Esféricas**

https://www.math.usm.edu/lee/mathphysarchive/?p=1046
https://en.m.wikipedia.org/wiki/Helmholtz_equation

Ondas **planas**

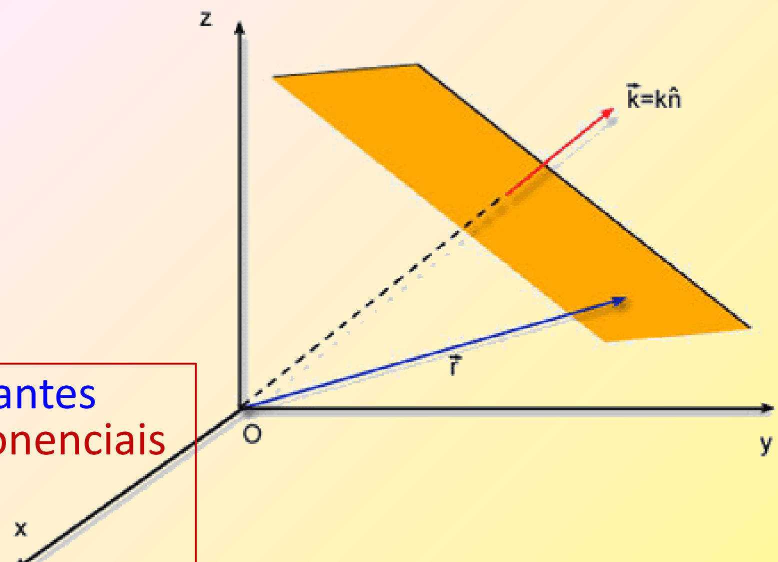
$$U(\mathbf{r}) = A \exp(-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) = A \exp\left[-j(k_x x + k_y y + k_z z)\right]$$

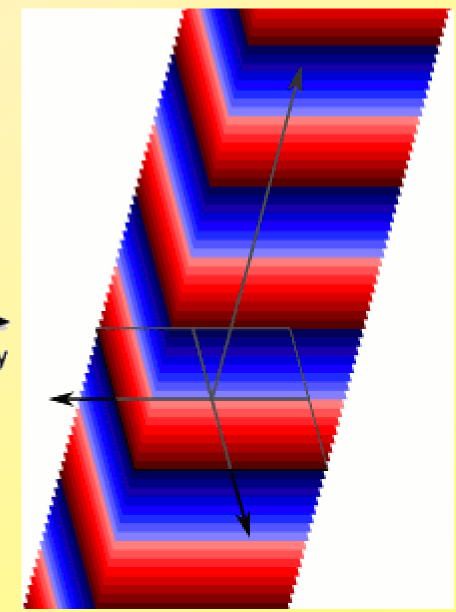
k=(k_x, k_y, k_z) é um vector de constantes de integração, cujo módulo tem de ser igual a k = ω/c:

|**k**| = k = ω/c → Número de ondas (nº de ciclos por unidade de comprimento)

A **fase** φ = **k.r** tem o mesmo valor em todos os pontos do mesmo plano perpendicular a **k**:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \boxed{-l^2,}$$
$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \boxed{-m^2,}$$
$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = \boxed{-n^2,}$$



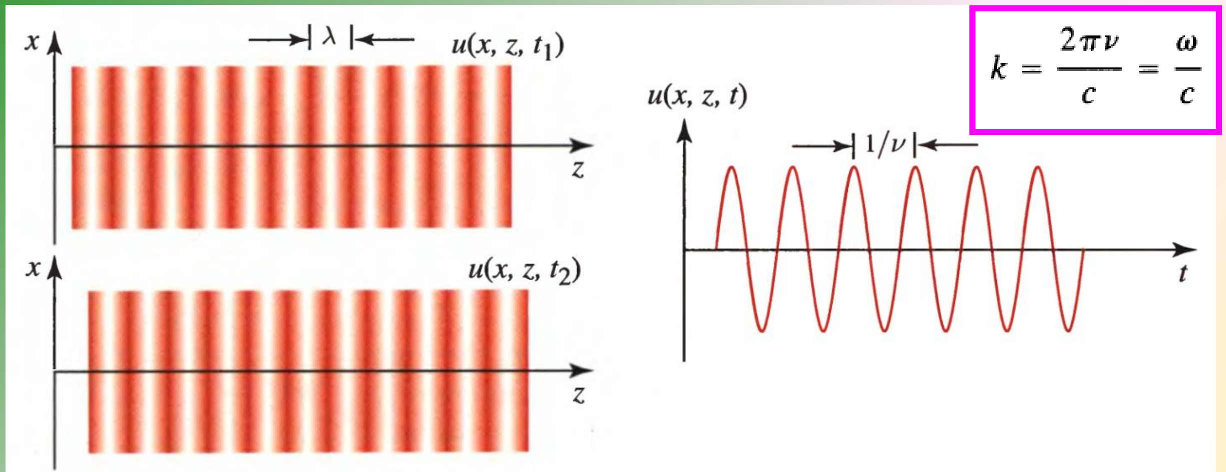


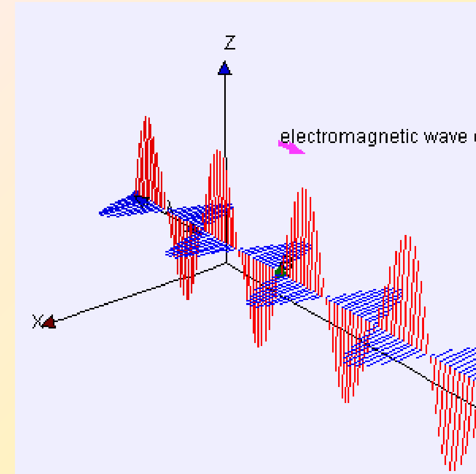
Se não se tivessem usado constantes **negativas**, teríamos obtido exponenciais reais:

- negativas (extinção) ou
- positivas (fisicamente inadmissíveis)…

Ondas **planas**

$$U(\mathbf{r}) = A\exp(-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) = A\exp\left[-j(k_x x + k_y y + k_z z)\right]$$





Superfícies de onda (planas) com a mesma fase e consecutivas, estão separados de um *comprimento de onda, λ*: $e^{ik(z+\lambda)} = e^{i(kz+2\pi)}$

$\lambda = 2\pi/k$, logo $\lambda = c/\nu$ → logo $k = 2\pi/\lambda$ (número de ondas!)

Onda plana monocromática (ao longo do eixo dos z):

É uma função periódica de z com período **$\lambda = c/\nu$**

É uma função periódica de t, com período **$\tau = 1/\nu$**.

A amplitude *A* é **constante** em todo o espaço

Irradiância (Wm^{-2}): $E(\mathbf{r})=A^2$

Num meio de índice n, $c=c_0/n$.

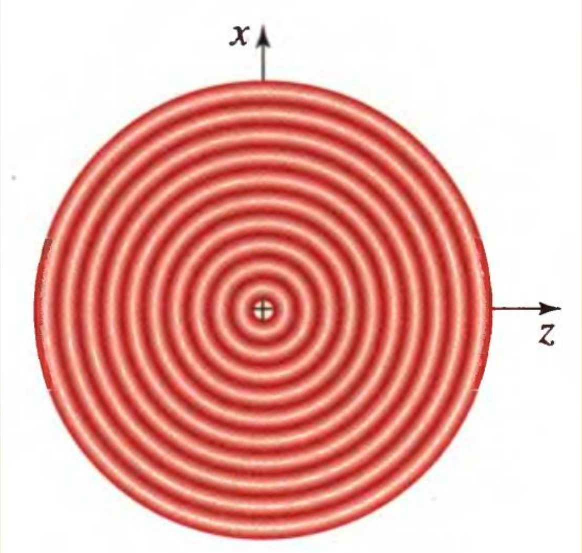
Como $\lambda=c/\nu$ → $\lambda=c_0/n\nu$ ou $\boldsymbol{\lambda=\lambda_0/n}$

O cdo é reduzido de n.

Como $k = 2\pi/\lambda$, então $\mathbf{k = nk_0}$.

Ondas **esféricas**

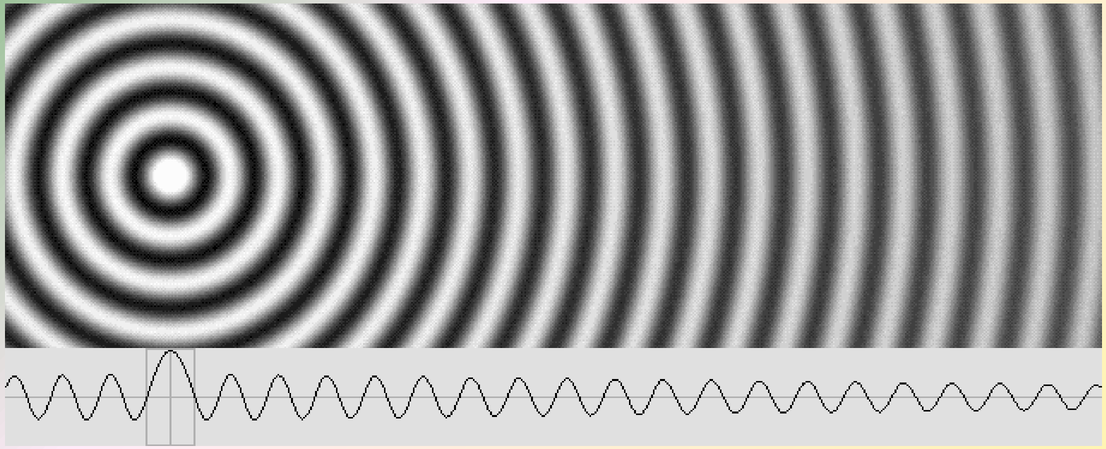
$$U(\mathbf{r}) = \frac{A}{r}\exp(-jkr)$$

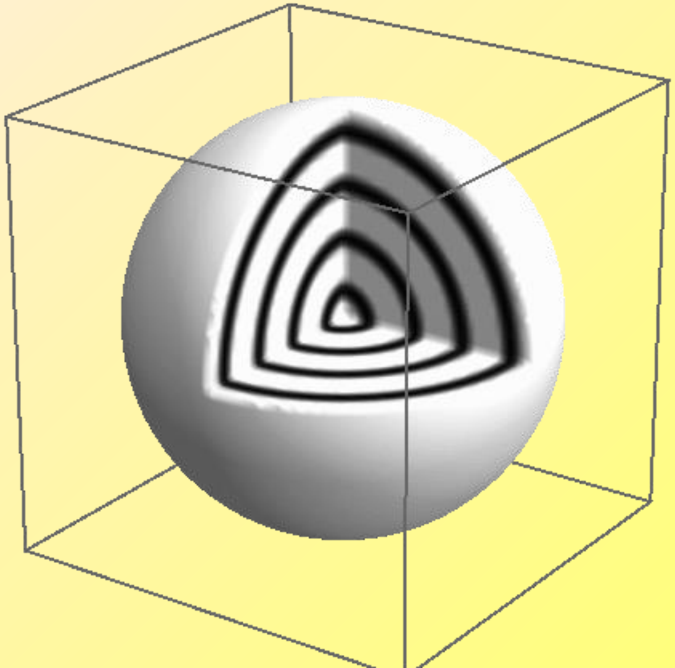


Irradiância (Wm^{-2}): $E(\mathbf{r})=|A|^2/r^2$

Frentes de onda (igual fase) **esféricas**

Amplitude varia com 1/r:



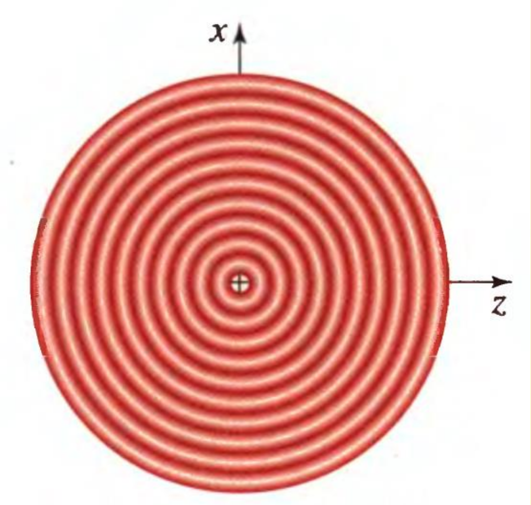


Ondas **esféricas**

Separação de variáveis em coordenadas esféricas.

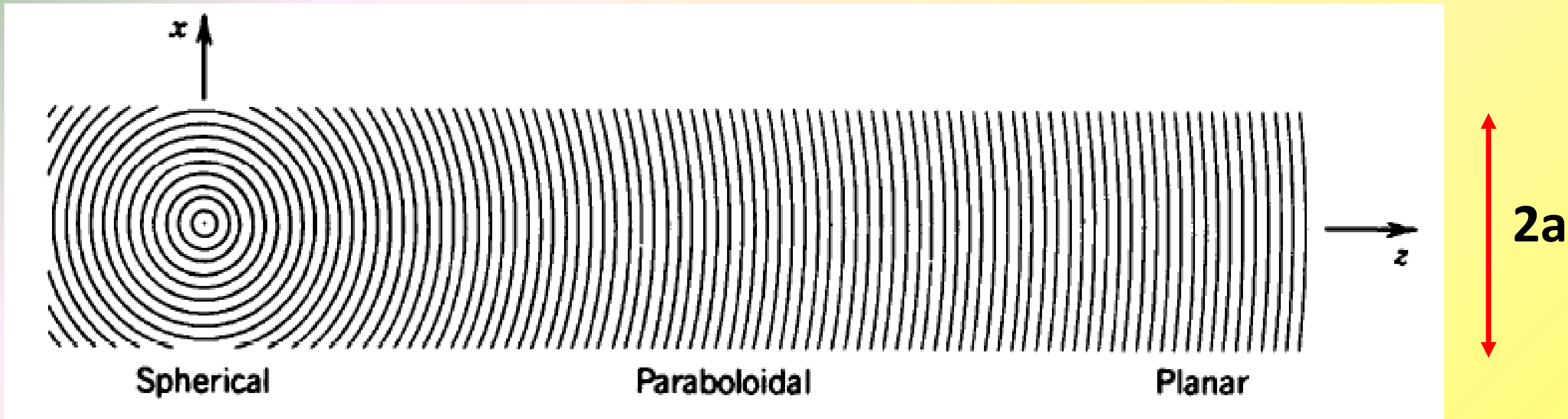
Irrelevância de θ e ϕ:

$$\boxed{U(\mathbf{r}) = \frac{A}{r}\exp(-jkr)}$$



Máximos consecutivos da amplitude separados de $\lambda = 2\pi/k$.

Muitas vezes só interessa o campo próximo do eixo de propagação (+/- a), a uma considerável distância da fonte:



Ondas **paraboloidais**

$$U(\mathbf{r}) = \frac{A}{r}\exp(-jkr)$$

$$U(\mathbf{r}) \approx \frac{A}{z}\exp(\boxed{-jkz})\exp\left[-jk\frac{x^2+y^2}{2z}\right]$$

Aproximação de Fresnel:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = z\sqrt{1+\theta^2} = z\left(1+\frac{\theta^2}{2}-\frac{\theta^4}{8}+\cdots\right)$$

$$\approx z\left(1+\frac{\theta^2}{2}\right) = z+\frac{x^2+y^2}{2z}.$$

$$\theta^2 = (x^2+y^2)/z^2 \ll 1$$

Validade: $kz\theta^4/8 \ll \pi$, or $(x^2+y^2)^2 \ll 4z^3\lambda$

Válido se:

$N_F \ll 1$ (Fraunhofer)

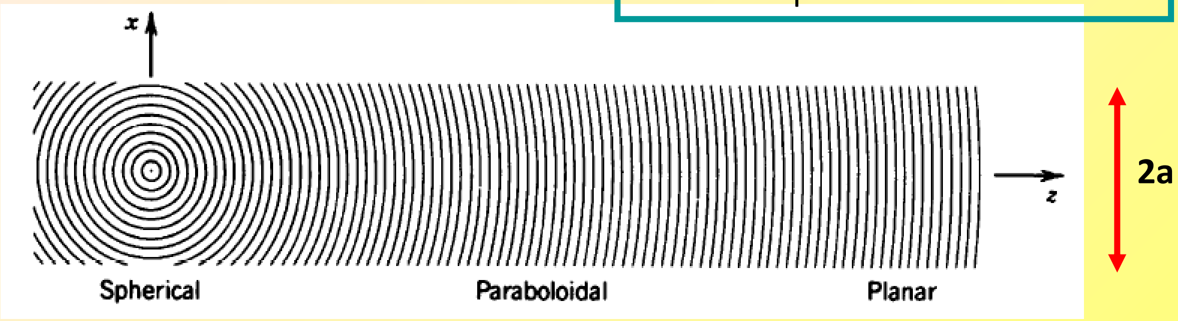
$N_F \sim 1$ (Fresnel)

$$\frac{N_F\theta_m^2}{4} \ll 1$$

$$N_F = \frac{a^2}{\lambda z}$$

$$\theta_m = a/z$$

Número de Fresnel



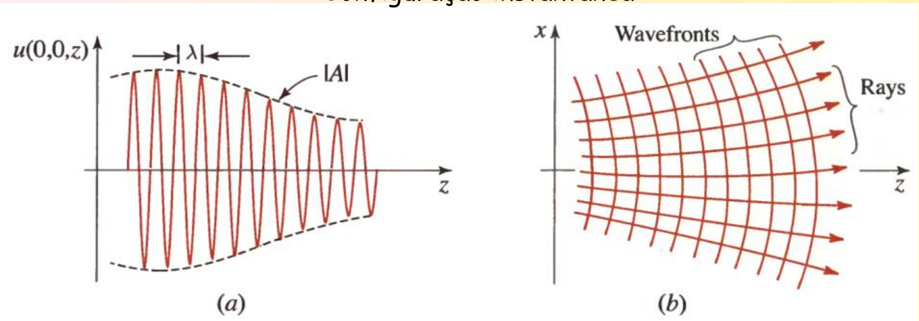
Ondas **Paraxiais**

Uma onda diz-se **paraxial**, se as normais às frentes de onda são paraxiais: **pequenos ângulos** com o eixo de propagação.

Modula-se a amplitude de de uma **onda plana** de uma forma **lenta** em relação a λ: Será que existem soluções e servem para alguma coisa?

$$\boxed{U(\mathbf{r}) = \boxed{A(\mathbf{r})}\exp(-jkz)}$$

Configuração instantânea



U(**r**) satisfaz a equação de Helmoltz, $(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{r}) = 0$ desde que A(**r**) (função *complexa*) satisfaça a **equação de Helmoltz Paraxial:**

$$\boxed{\nabla_T^2 A - j\,2k\frac{\partial A}{\partial z} = 0}$$

$$\boxed{u(\mathbf{r}, t) = |A(\mathbf{r})|\cos[2\pi\nu t - kz + \arg\{A(\mathbf{r})\}]}$$

Ondas **Paraxiais**

A(**r**) varia lentamente com **r**, logo:

$$(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{r}) = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} \ll kA \qquad \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll k^2 A$$

Desprezando várias derivadas parciais, obtém-se a **Equação de Helmoltz Paraxial (EHP):**

$$\boxed{\nabla_T^2 A - j\,2k\frac{\partial A}{\partial z} = 0}$$

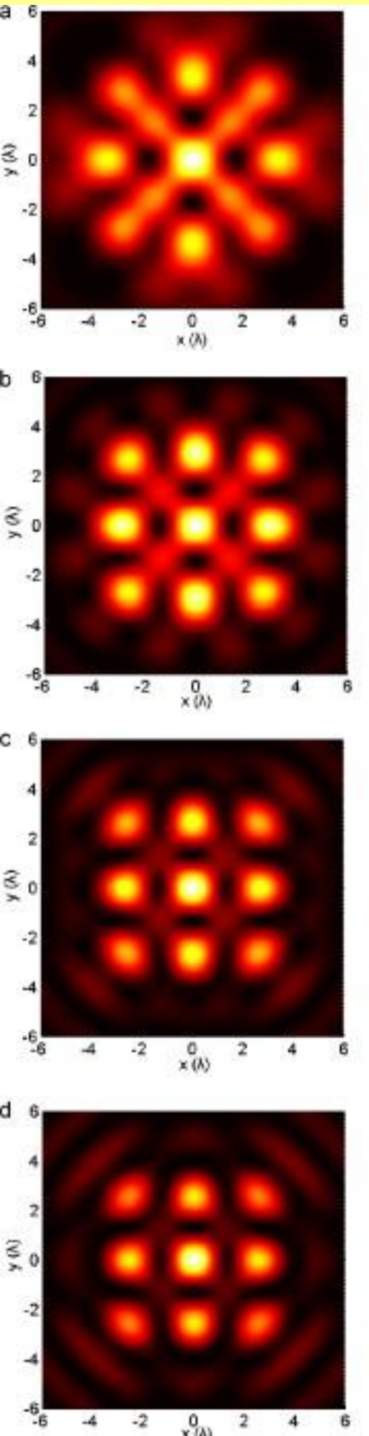
Matematicamente, esta equação é semelhante à equação de **Schrodinger**…

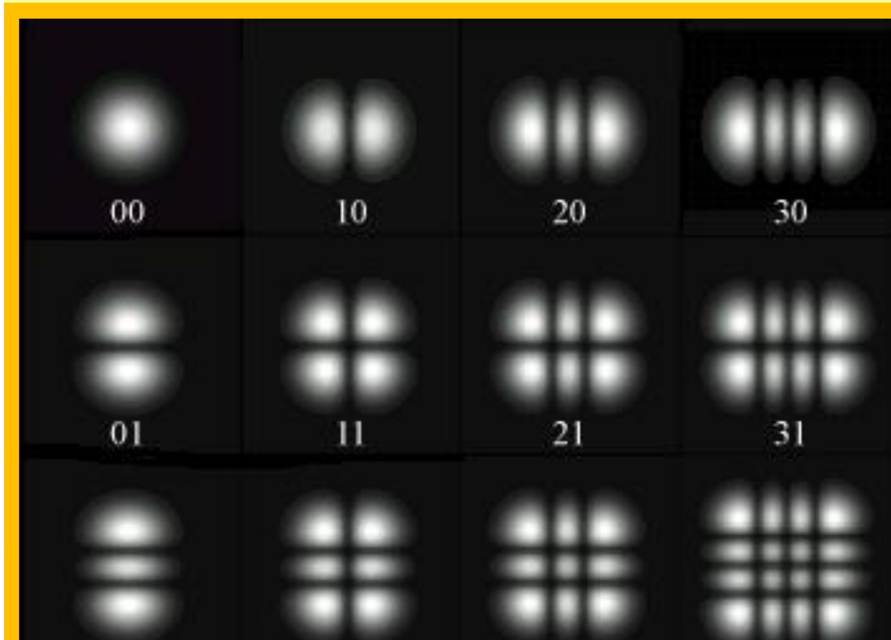
A solução mais *simples* é a **onda paraboloidal**

A solução mais **interessante** é a **onda Gaussiana**

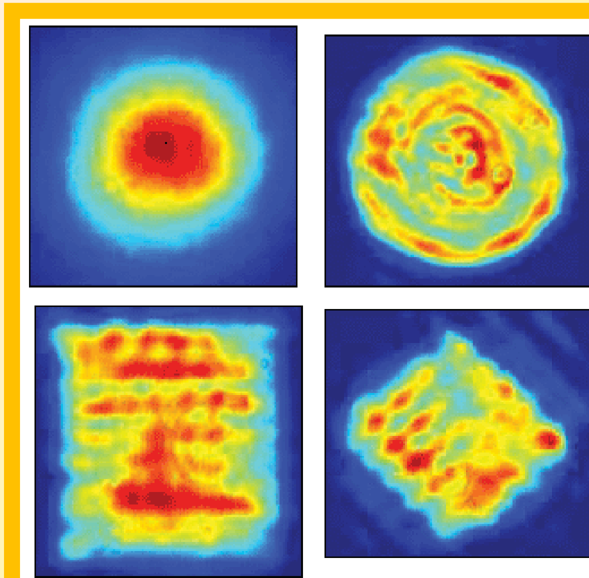
→

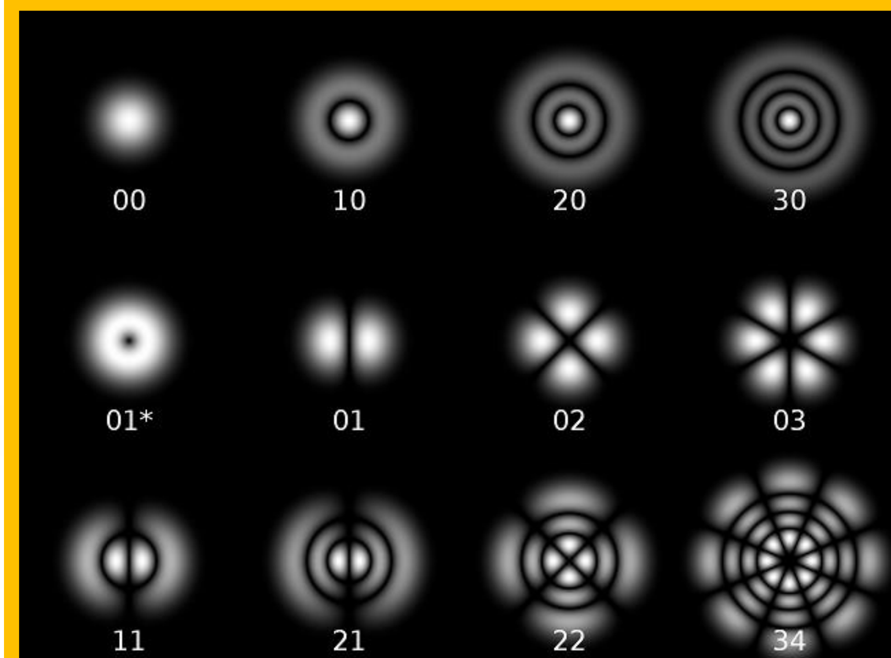
Feixes **gaussianos**





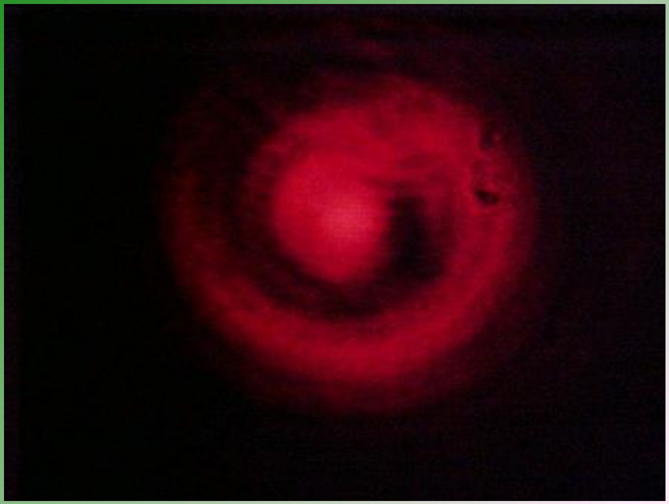
Modos de Hermite-Gauss

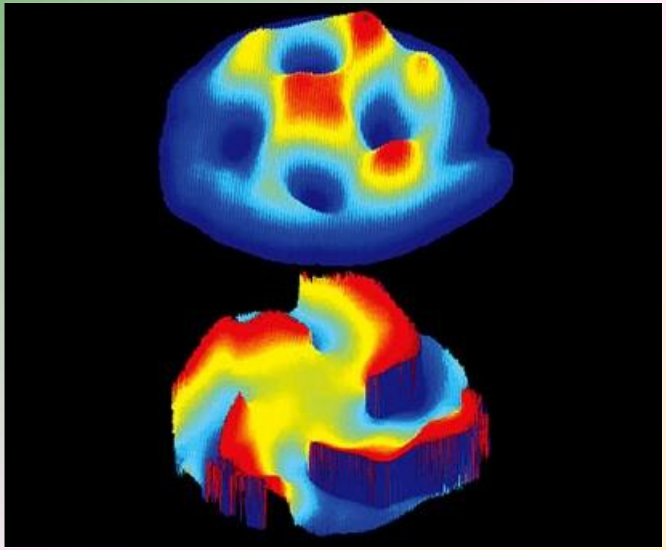


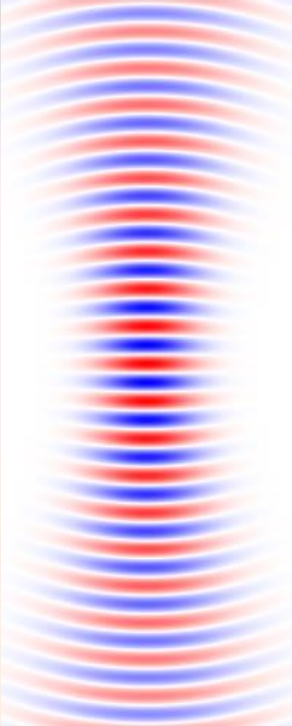


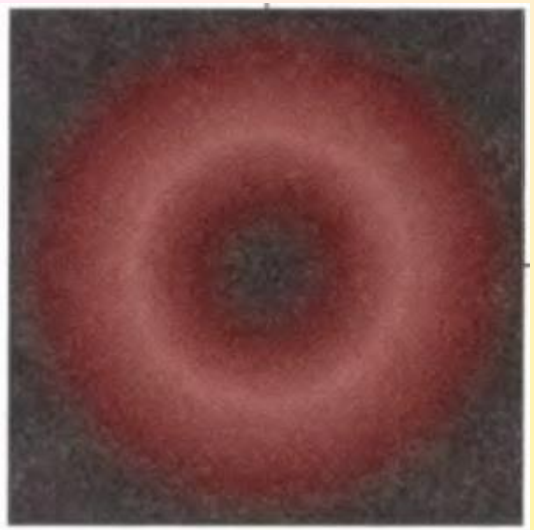
Modos de Laguerre-Gauss

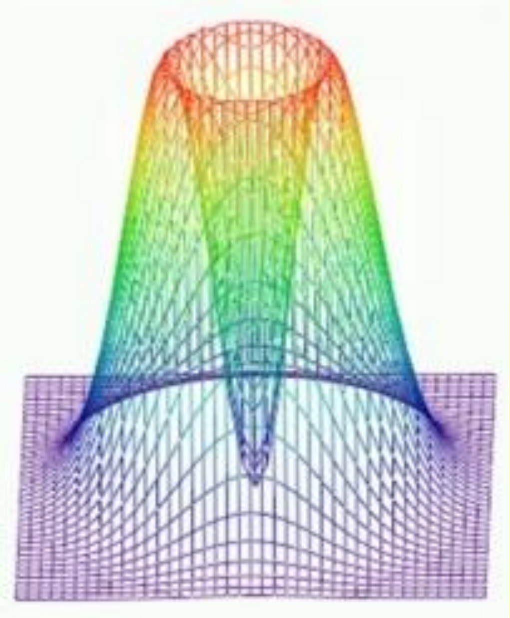
Feixes **gaussianos**





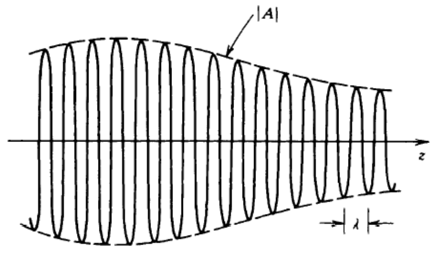






Feixes gaussianos: construção

Formato de solução da EHP:



$$\boxed{U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp(-jkz)}$$

- Onda "essencialmente" plana ao longo do eixo dos z, (exp –ikz)
- A variação **longitudinal** (em z) de A(**r**) é **lenta**

Se a onda paraboloidal

$$A(\mathbf{r}) = \frac{A_1}{z} \exp\left(-jk\frac{\rho^2}{2z}\right), \qquad \rho^2 = x^2 + y^2$$

é solução da EHP, uma sua **versão "transladada" de (ξ) também é**:

$$A(\mathbf{r}) = \frac{A_1}{q(z)} \exp\left[-jk\frac{\rho^2}{2q(z)}\right], \qquad q(z) = z - \xi$$

ξ pode ser real **ou complexo**. Se **ξ=-iz_0**, (z_0- **parâmetro de Rayleigh**)

$$\boxed{A(\mathbf{r}) = \frac{A_1}{q(z)} \exp\left[-jk\frac{\rho^2}{2q(z)}\right], \qquad q(z) = z + jz_0}$$

Feixes gaussianos: amplitude complexa

Separando as partes real e imaginária de 1/q(z):

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - j\frac{\lambda}{\pi W^2(z)}$$

... e colando tudo, obtém-se a **Amplitude Complexa do modo (0,0) de um Feixe Gaussiano**:

$$\boxed{U(\mathbf{r}) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp\left[-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right] \exp\left[-jkz - jk\frac{\rho^2}{2R(z)} + j\zeta(z)\right]}$$

Com

$$W(z) = W_0\left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$R(z) = z\left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right]$$

$$\zeta(z) = \tan^{-1}\frac{z}{z_0}$$

$$W_0 = \left(\frac{\lambda z_0}{\pi}\right)^{1/2}$$

$$A_0 = A_1/jz_0$$

Parâmetros livres: A_0 , z_0, λ.

Feixes gaussianos: **Propriedades**

$$U(\mathbf{r}) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp\left[-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right] \exp\left[-jkz - jk\frac{\rho^2}{2R(z)} + j\zeta(z)\right]$$

1 – Irradiância (W/m^2)

2 – Potência (W)

3 - Largura do feixe

4 - Divergência

5 - Profundidade de foco

6 - Fase

7 - Frentes de onda

8 - Qualidade do feixe

Feixes gaussianos: Irradiância

$$U(\mathbf{r}) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp\left[-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right] \exp\left[-jkz - jk\frac{\rho^2}{2R(z)} + j\zeta(z)\right]$$

$$\rho^2 = (x^2 + y^2)$$

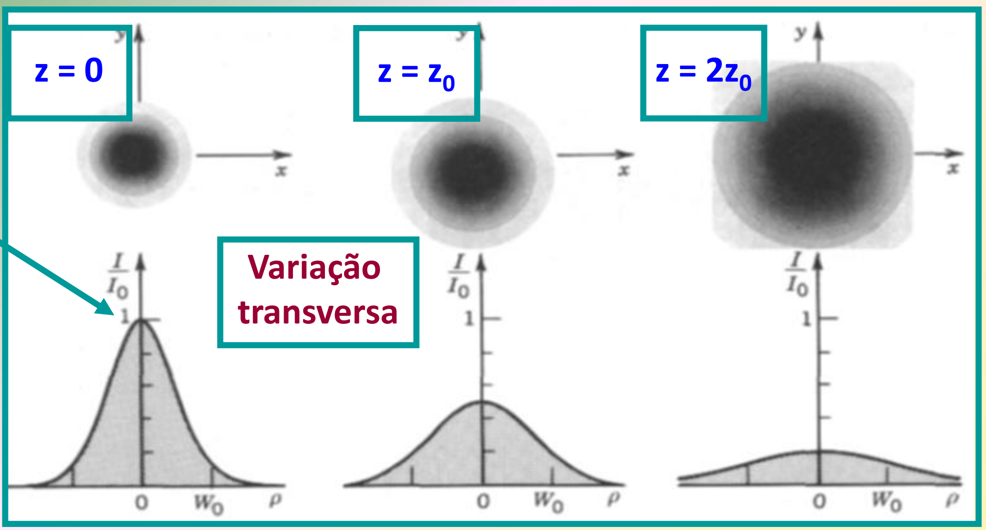
$$E(\mathbf{r}) = |U(\mathbf{r})|^2$$

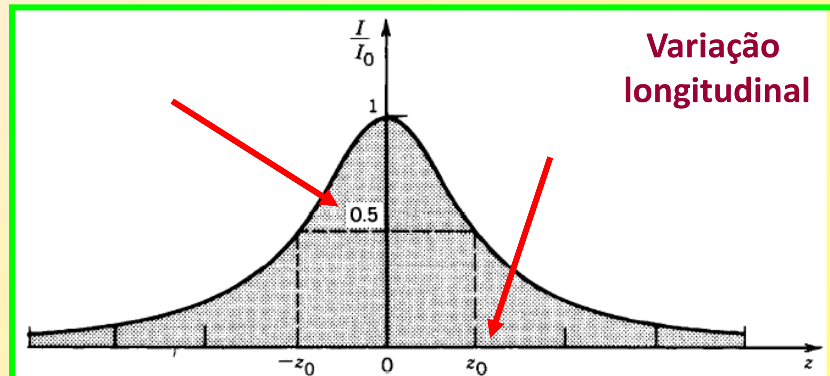
$$E(\rho, z) = I_0 \left[\frac{W_0}{W(z)}\right]^2 \exp\left[-\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right]$$

$$W(z) = W_0\left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]^{1/2}$$

→ $E(z)$ é uma função gaussiana de ρ, com máximo em z=0.

→ A largura do feixe **W(z)** aumenta com z:

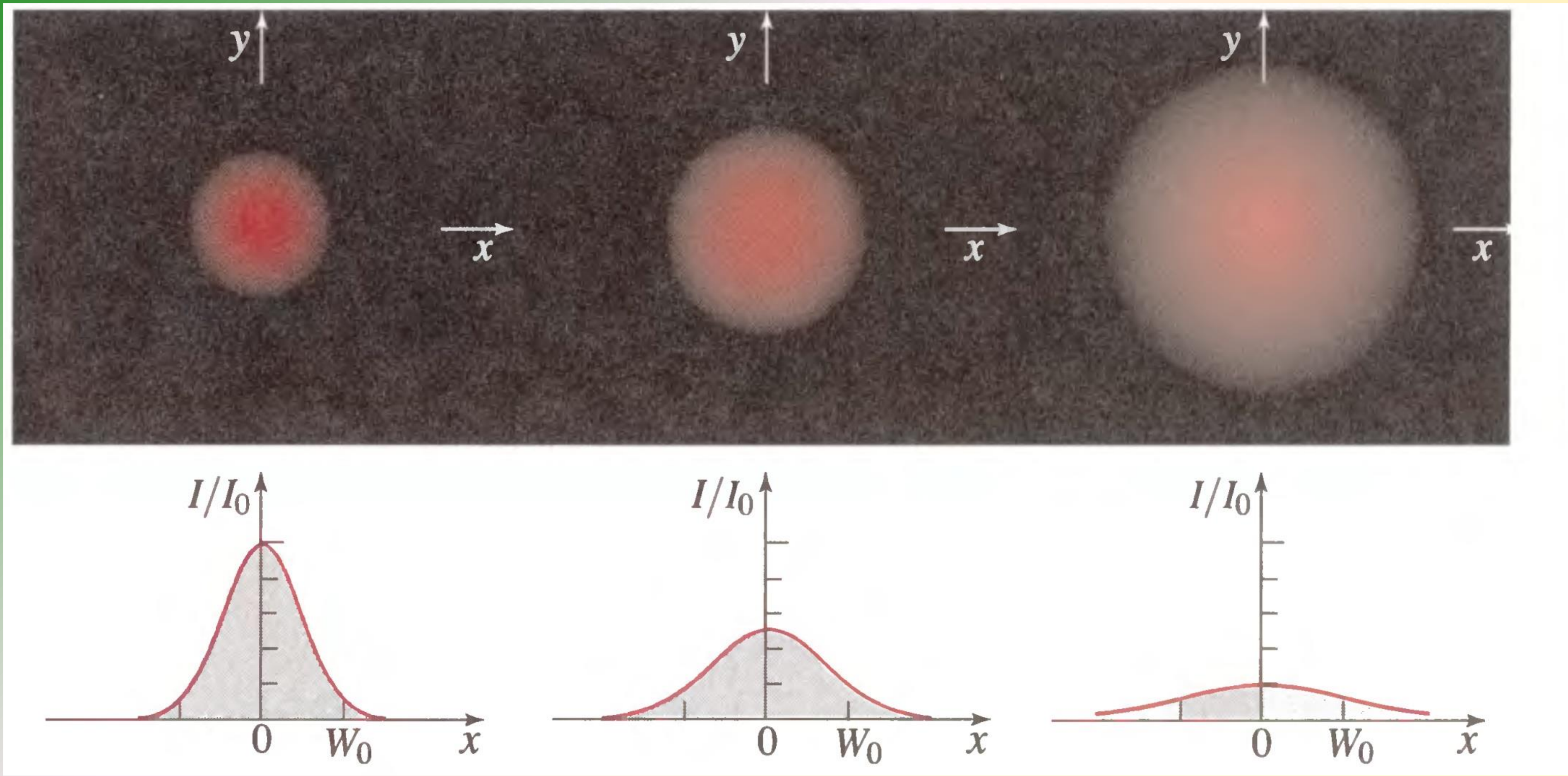




Ao longo do eixo, (ρ=0) (com $I_0 = |A_0|^2$),

$$I(0, z) = I_0\left[\frac{W_0}{W(z)}\right]^2 = \frac{I_0}{1 + (z/z_0)^2}$$

Feixes gaussianos: Irradiância



Feixes gaussianos: Potência ou Fluxo

O **Fluxo (W) total** de um feixe obtém-se integrando a irradiância num plano transverso:

$I_0 = |A_0|^2$

$$P = \int_0^\infty E(\rho,z) \quad 2\pi\rho \, d\rho = \tfrac{1}{2} I_0 \left(\pi W_0^2\right)$$

O fluxo é metade da irradiância máxima multiplicado pela "área do feixe" no plano da cintura e não depende de z.

Em termos do fluxo, *P*, a **Irradiância (W/m^2)** toma a forma:

$$\boxed{E(\rho,z) = \frac{2P}{\pi W^2(z)} \exp\left[-\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right]}$$

$$W(z) = W_0\left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]^{1/2}$$

Num círculo de raio ρ_0:

$\rho_0 =$ W(z) → 86%

$\rho_0 =$ 1.5W(z) → 99%

$$\boxed{\frac{1}{P}\int_0^{\rho_0} E(\rho,z)\, 2\pi\rho \, d\rho = 1 - \exp\left[-\frac{2\rho_0^2}{W^2(z)}\right]}$$

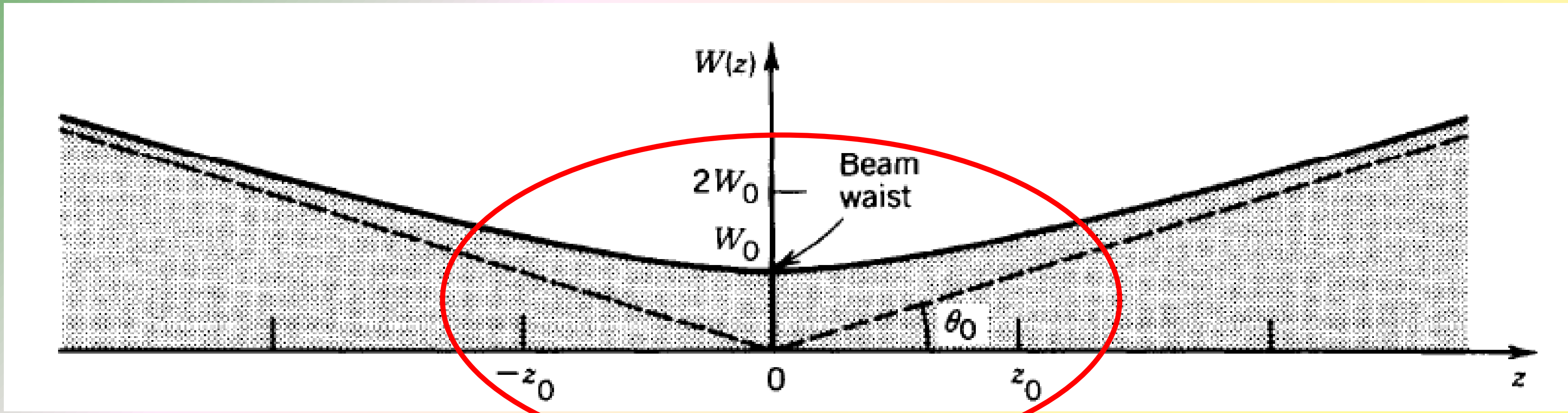
Feixes gaussianos: Largura de feixe

A Irradiânica, *E*, diminui de $1/e^2 \sim 0.135$ para $\rho = W(z)$.

Como ~86% da fluxo (*W*) está contida num círculo de raio W(z), W(z) considera-se **Raio do feixe** em z:

$$W(z) = W_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$W_0 = \left(\frac{\lambda z_0}{\pi} \right)^{1/2}$$



Mínimo, W_0, em z=0 → plano da cintura (**beam waist**)

Diâmetro do feixe (**spot size**): $2W_0$.

$W(z) = 2^{1/2}\, W_0$ para $z = \pm z_0$.

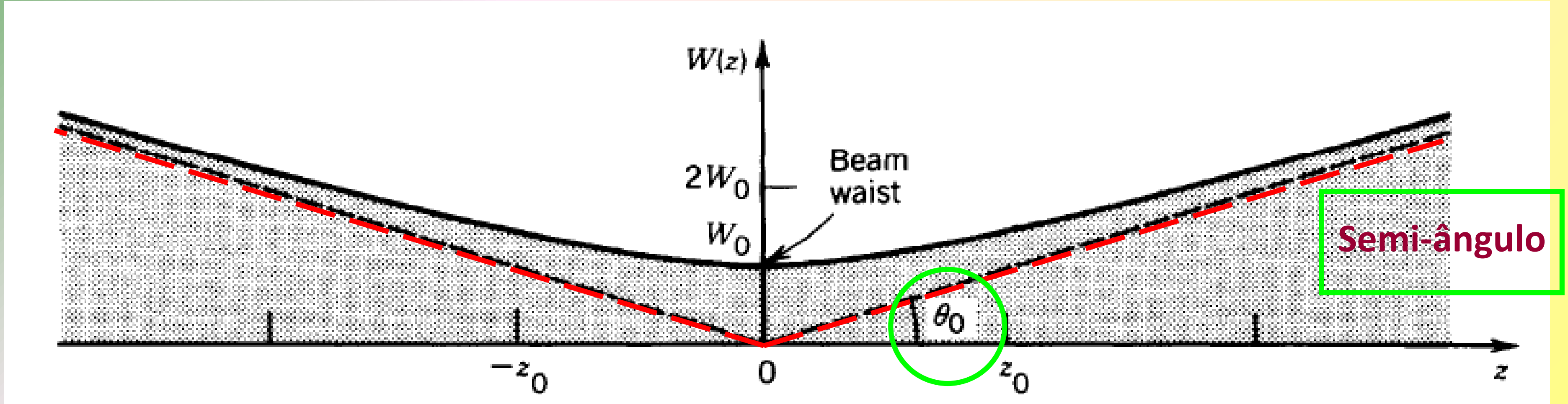
Feixes gaussianos: Divergência

$$W_0 = \left(\frac{\lambda z_0}{\pi}\right)^{1/2}$$

Se $z >> z_0$, o factor 1 pode ser desprezado:

$$W(z) = W_0\left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]^{1/2} \rightarrow W(z) \approx \frac{W_0}{z_0} z = \theta_0 z$$

$$\theta_0 = W_0/z_0 = \frac{\lambda}{\pi W_0}$$



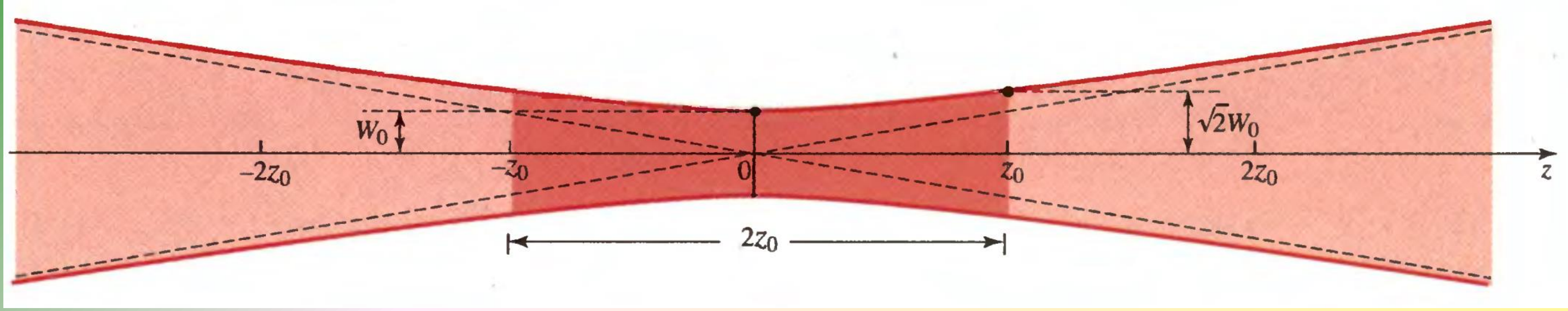
→Se W_0 diminui, (z₀ diminui), θ_0 aumenta.

→Feixe **muito direccional**: pequeno λ e grande cintura W_0

Feixes gaussianos: Profundidade de foco

O plano da cintura é o plano de melhor "foco".

A **profundidade de foco** ou **distância confocal** é a distância ao longo da qual o raio do feixe não excede $2^{1/2}W_0$, e é igual ao dobro do parâmetro de Rayleigh:



$$2z_0 = \frac{2\pi W_0^2}{\lambda}$$

Se λ = 633 nm (HeNe):

$2W_0 = 2$ cm → $2z_0 = 1$ km

$2W_0 = 20\ \mu$m → $2z_0 = 1$ mm

Feixes gaussianos: **Propriedades**

$$U(\mathbf{r}) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp\left[-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right] \exp\left[-jkz - jk\frac{\rho^2}{2R(z)} + j\zeta(z)\right]$$

6 - Fase

7 - Frentes de onda

8 - Qualidade do feixe

Feixes gaussianos: Fase ao longo do eixo

A fase do feixe gaussiano é

$$\boxed{\varphi(\rho, z) = kz - \zeta(z) + \frac{k\rho^2}{2R(z)}}$$

$$\boxed{R(z) = z\left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right]}$$

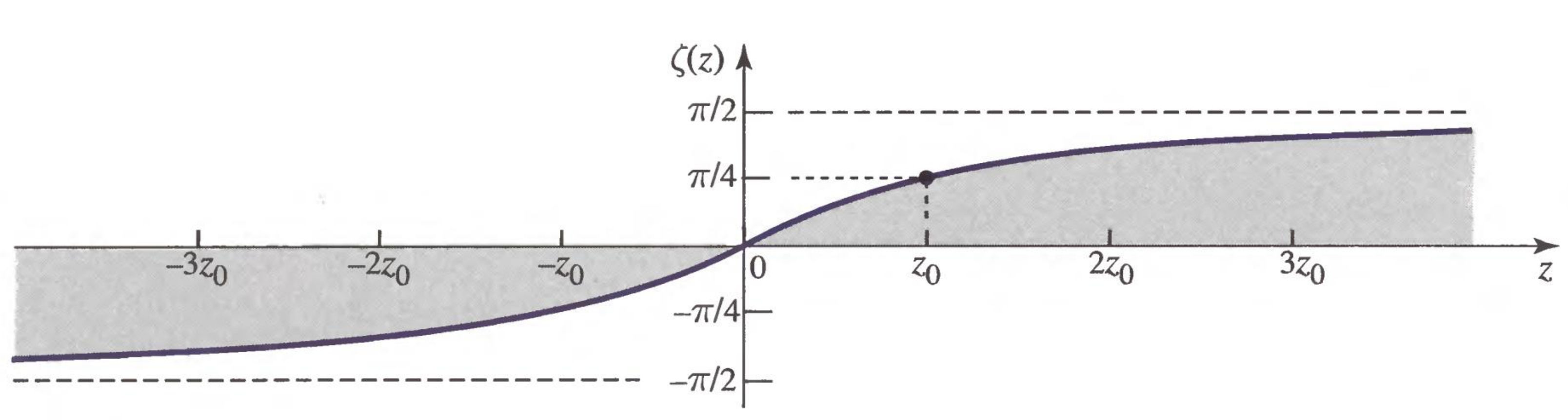
Ao longo do eixo ($\rho = 0$):

$$\boxed{\varphi(0, z) = kz - \zeta(z)}$$

→ kz é a fase de uma onda plana

→ $\zeta(z) = atan\ z/z_0$ desvio relativamente à fase da onda plana

- A diferença de fase associada à **passagem pela cintura** é π: **efeito Gouy**



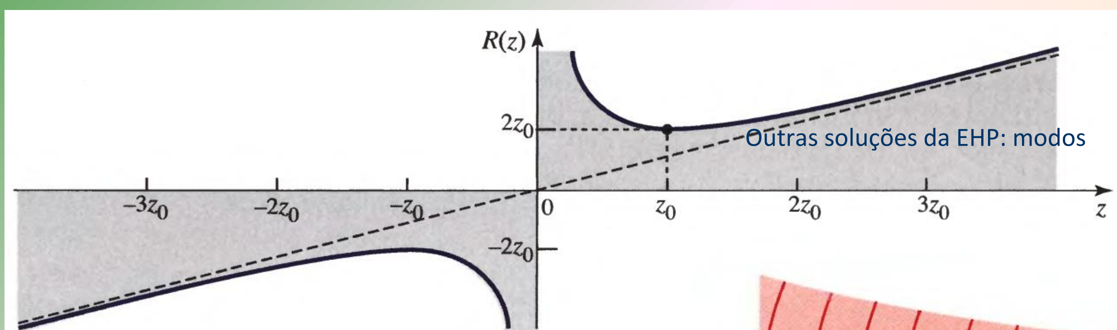
Feixes gaussianos: Frentes de onda

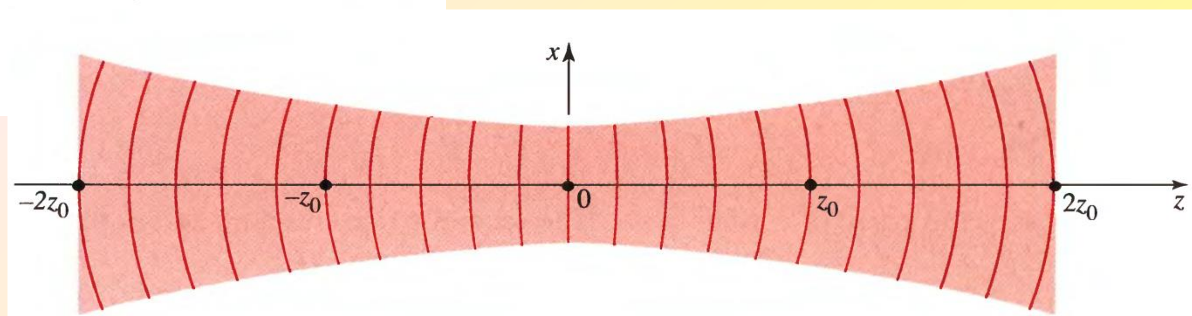
$$\varphi(\rho, z) = kz - \zeta(z) + \frac{k\rho^2}{2R(z)}$$

$$R(z) = z\left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right]$$

O 3º termo da fase representa, **para cada valor de z**, a fase de uma onda esférica na aproximação paraboloidal, com **raio de curvatura** na origem **R(z)**

$$U(\mathbf{r}) \approx \frac{A}{z}\exp(-jkz)\exp\left[-jk\frac{x^2+y^2}{2z}\right]$$





R(z) → ∞ quando z → 0 (cintura): fase de uma onda **plana**

|R(z)| é mínimo para $z = z_0$.

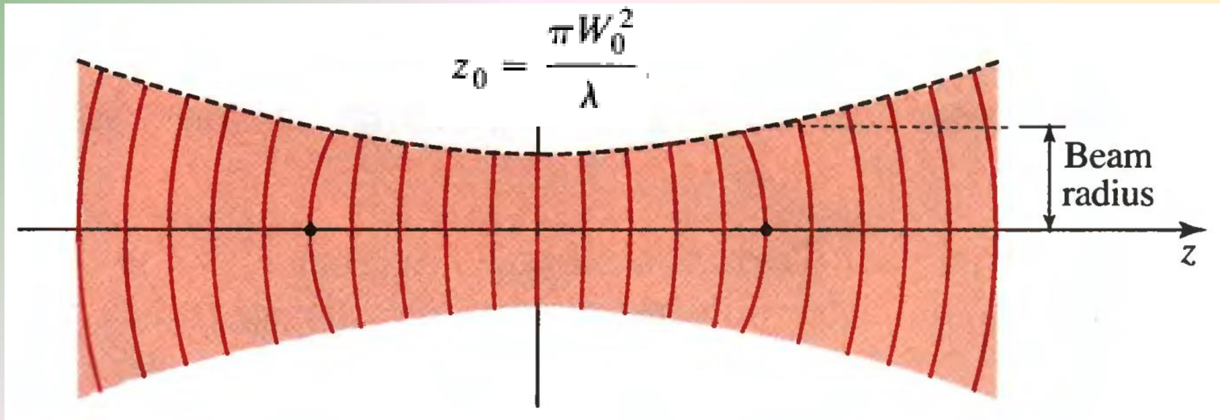
R(z) varia linearmente com z quando $z \gg z_0$: onda **esférica**

Frentes de onda, modos

Feixes gaussianos (FG)

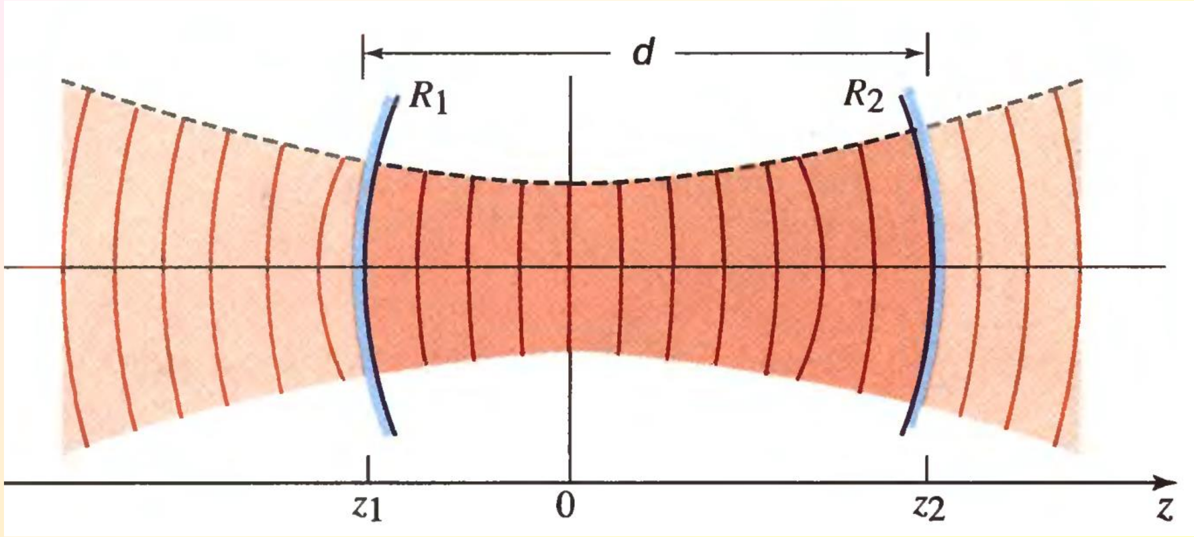
$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}$$

$$R(z) = z\left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right]$$



Os FG são modos das cavidades esféricas:

Se os raios de curvatura das FO forem **iguais** aos raios de curvatura dos espelhos, **a onda reflecte-se sobre si própria e a configuração da onda mantém-se estável → modo EM**



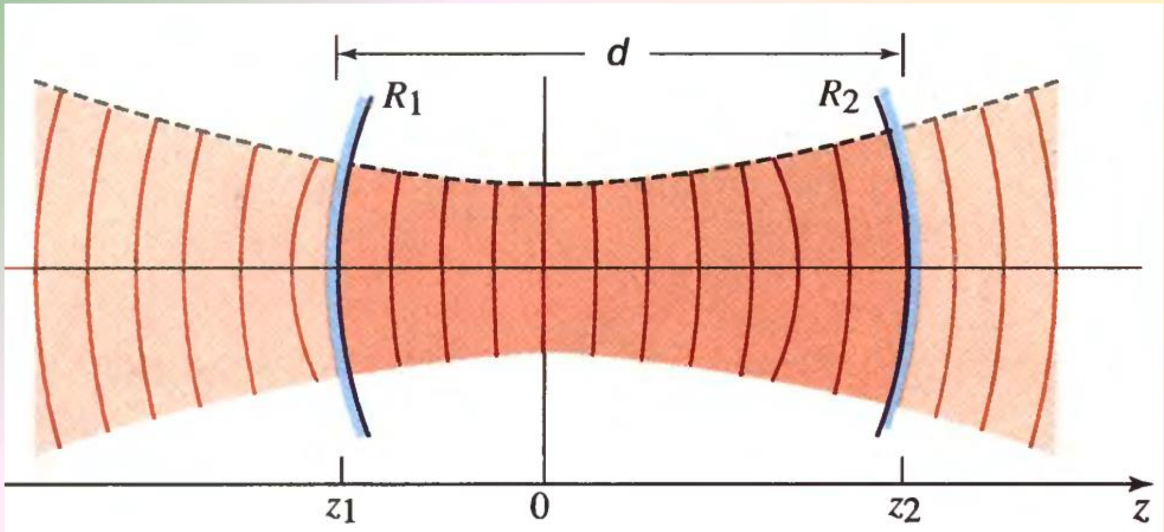
Parâmetros do feixe em cavidades ressonantes

Com dois espelhos separados de *d*, coloca-se a origem *algures*:

$$z_2 = z_1 + d,$$

$$R_1 = z_1 + \frac{z_0^2}{z_1}$$

$$-R_2 = z_2 + \frac{z_0^2}{z_2}.$$



$$W(z) = W_0\left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$R(z) = z + \frac{z_0^2}{z}$$

$$z_0 = \frac{\pi W_0^2}{\lambda}$$

Resolve-se este sistema em ordem a z_0, z_1 e z_2:

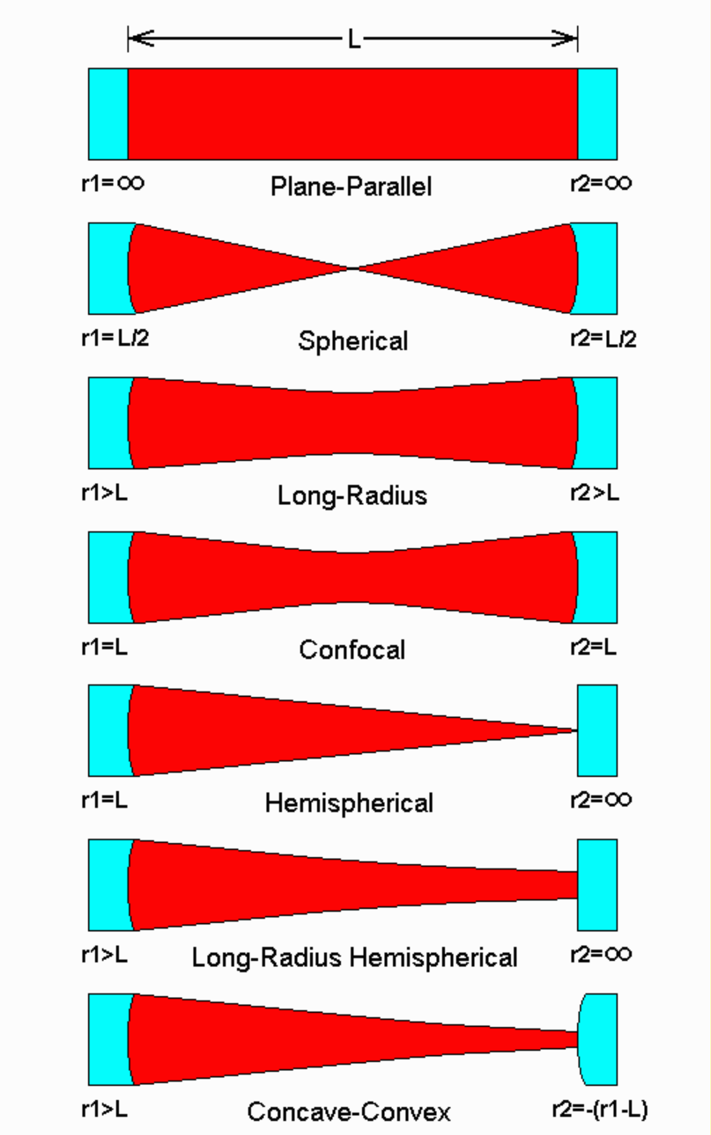
$$z_1 = \frac{-d\,(R_2 + d)}{R_2 + R_1 + 2d}, \qquad z_2 = z_1 + d,$$

$$z_0^2 = \frac{-d\,(R_1 + d)(R_2 + d)(R_2 + R_1 + d)}{(R_2 + R_1 + 2d)^2}$$

Feixe gaussiano em cavidades ressonantes

Para a solução ser gaussiana, z_0 deve ser **real**: $z_0^2 > 0$, isto é:

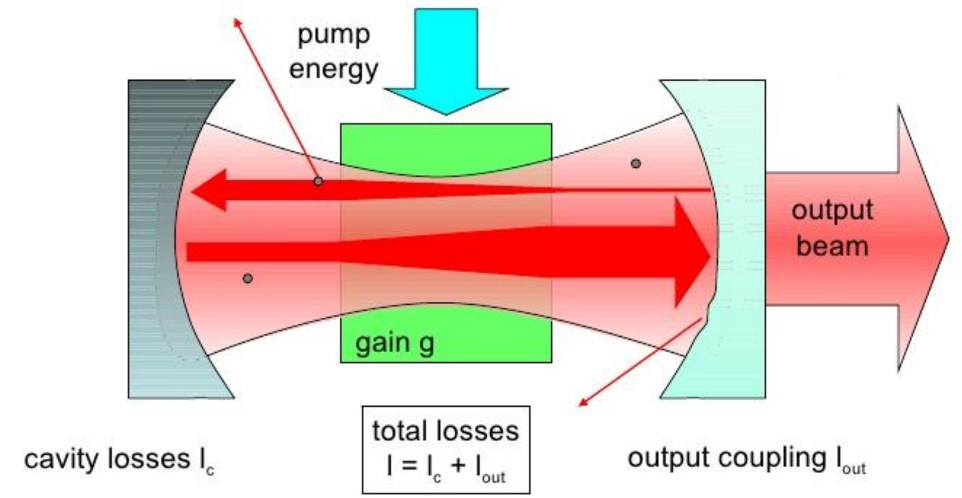
$$0 \le \left(1 + \frac{d}{R_1}\right)\left(1 + \frac{d}{R_2}\right) \le 1$$



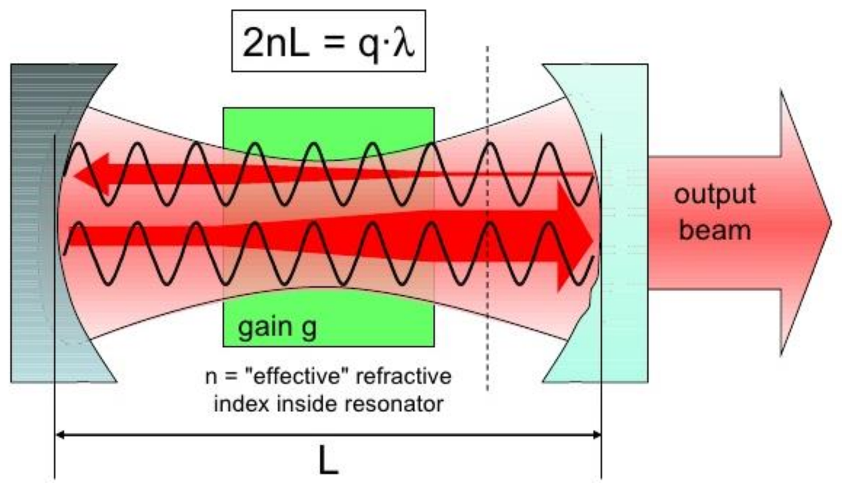
Cavidades ressonantes laser estáveis e instáveis…

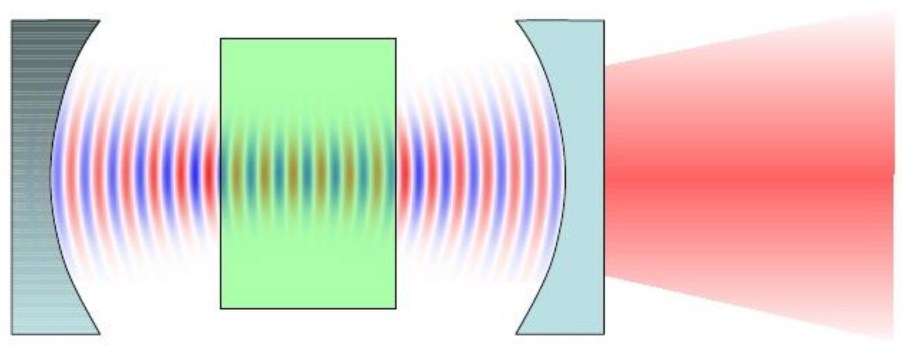
Cintura dentro ou fora da cavidade ressonante

Lasers…

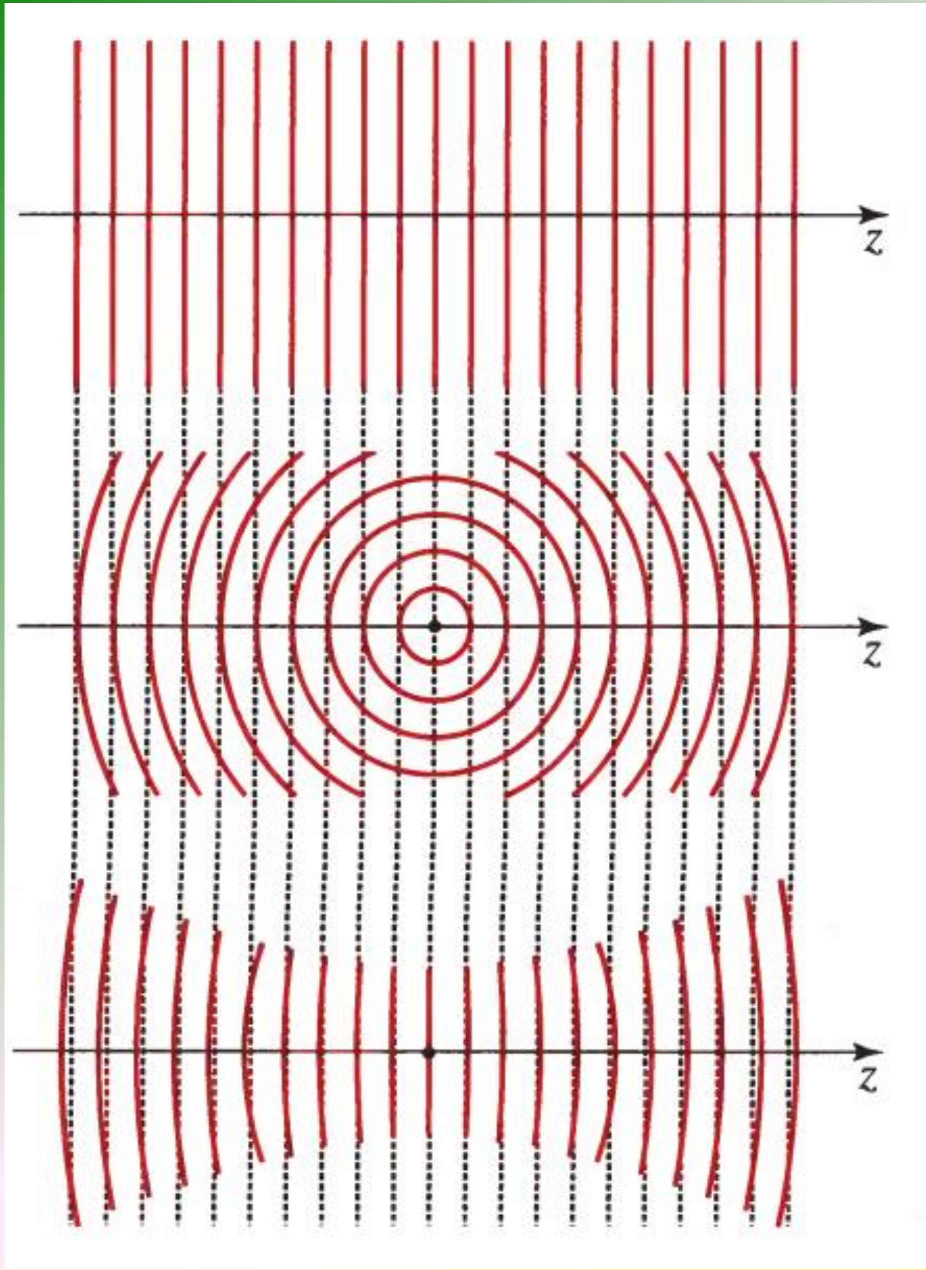


Resonator + Gain Medium





Feixes gaussianos: frentes de onda



$$U(\mathbf{r}) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp\left[-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right] \exp\left[-jkz - jk\frac{\rho^2}{2R(z)} + j\zeta(z)\right]$$

$$\varphi(\rho, z) = kz - \zeta(z) + \frac{k\rho^2}{2R(z)}$$

Feixes gaussianos: Parâmetros

Onda plana

Amplitude complexa

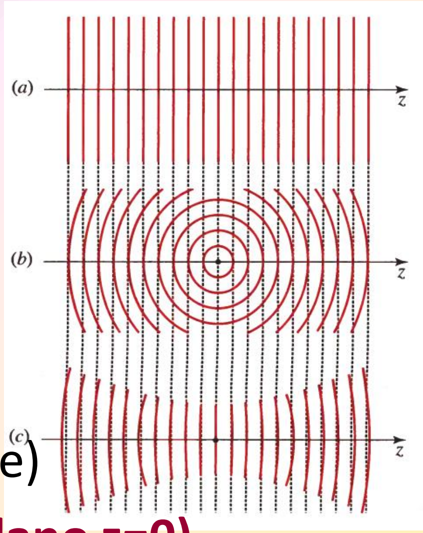
Direcção de propagação

$$U(\mathbf{r}) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp\left[-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right] \exp\left[-jkz - jk\frac{\rho^2}{2R(z)} + j\zeta(z)\right]$$

Onda esférica

Amplitude complexa

Localização da origem



$$W(z) = W_0\left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$R(z) = z\left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right]$$

$$\zeta(z) = \tan^{-1}\frac{z}{z_0}$$

$$W_0 = \left(\frac{\lambda z_0}{\pi}\right)^{1/2}$$

$$2z_0 = \frac{2\pi W_0^2}{\lambda}$$

Feixe Gaussiano

Amplitude máxima, A_0

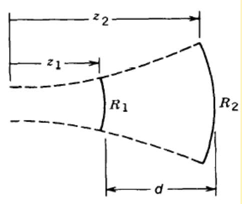
Direcção (eixo de propagação do feixe)

Localização da cintura (posição do plano z=0)

Um parâmetro adicional, z_0 ou W_0

Se os parâmetros forem conhecidos num ponto qualquer ao longo do eixo de propagação → podem ser calculados para qualquer outro ponto

Por exemplo, se R(z) for conhecido para dois pontos separados de Δz=d, todos os parâmetros do feixe podem ser determinados (Saleh, Problema 3.1-5)



$$z_1 = \frac{-d(R_2 - d)}{R_2 - R_1 - 2d}$$

$$z_0^2 = \frac{-d(R_1 + d)(R_2 - d)(R_2 - R_1 - d)}{(R_2 - R_1 - 2d)^2}$$

$$W_0 = \left(\frac{\lambda z_0}{\pi}\right)^{1/2}.$$

Feixes gaussianos: Qualidade do feixe, factor M^2

O feixe gaussiano constitui um caso limite, ideal

Uma medida do desvio de um feixe real relativamente ao feixe gaussiano é uma **medida de qualidade** do feixe.

O factor de qualidade mais frequente é o **factor M^2**:

Para o feixe real e para o feixe gaussiano ideal, calcula-se o produto:

P = (diâmetro da cintura, $2W_m$).(divergência total, $2\theta_m$)

→ **Para um feixe Gaussiano, $P_0 = 4\lambda/\pi$**

O factor M^2 define-se como:

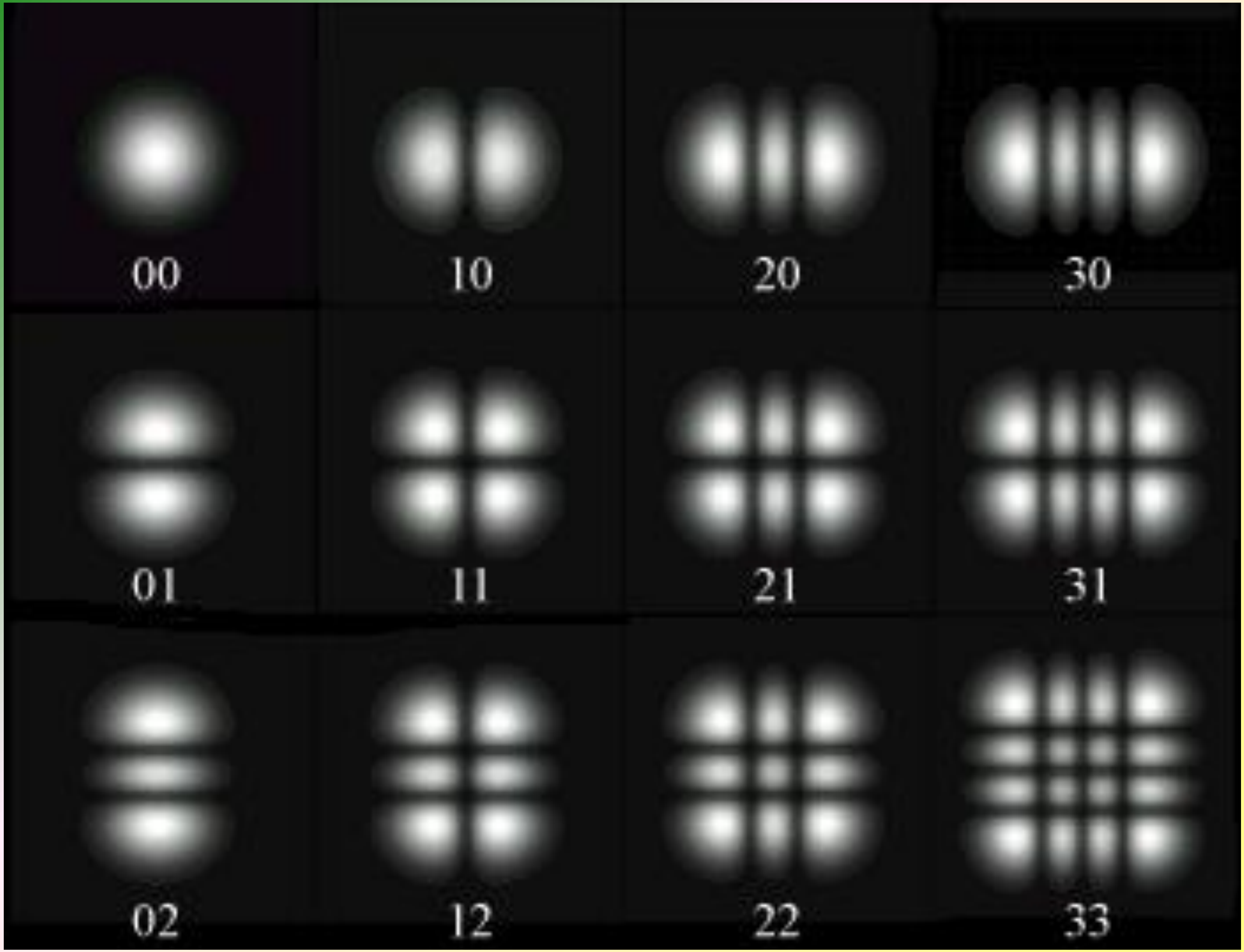
$$M^2 = P_{feixeReal} / P_0 = \pi/\lambda \; W_m \, \theta_m$$

Quanto mais **próximo de 1**, mais Gaussiano é o feixe:

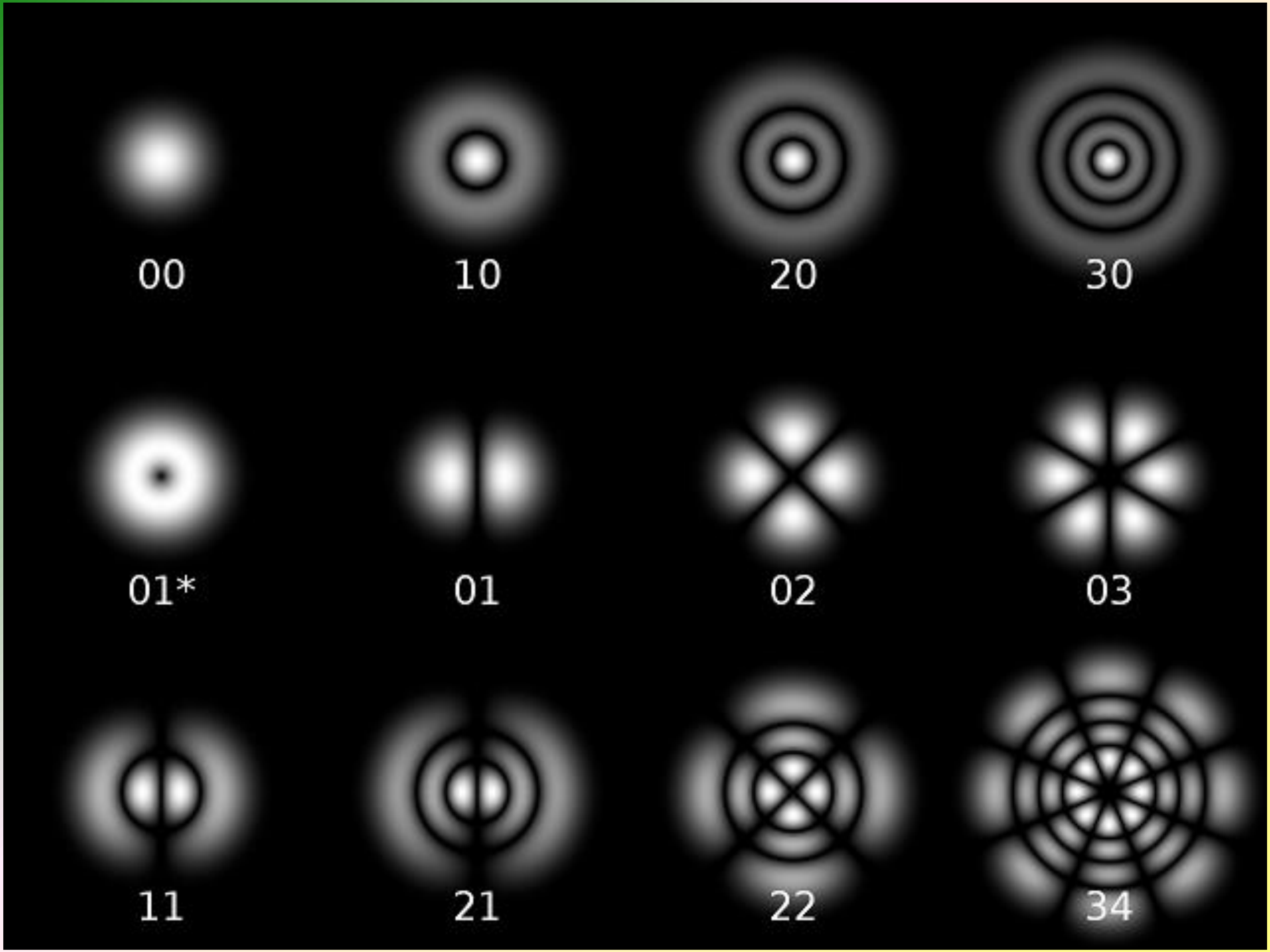
HeNe:	$M^2 < 1.1$
Lasers iónicos:	$M^2 \sim 1.1 - 1.3$
Lasers díodo:	$M^2 \sim 1.1 - 1.7$
Potência elevada, multi-modo:	$M^2 \sim 2 - 4$

A medida de $\mathbf{M^2}$ faz-se com câmaras CCD a várias distâncias

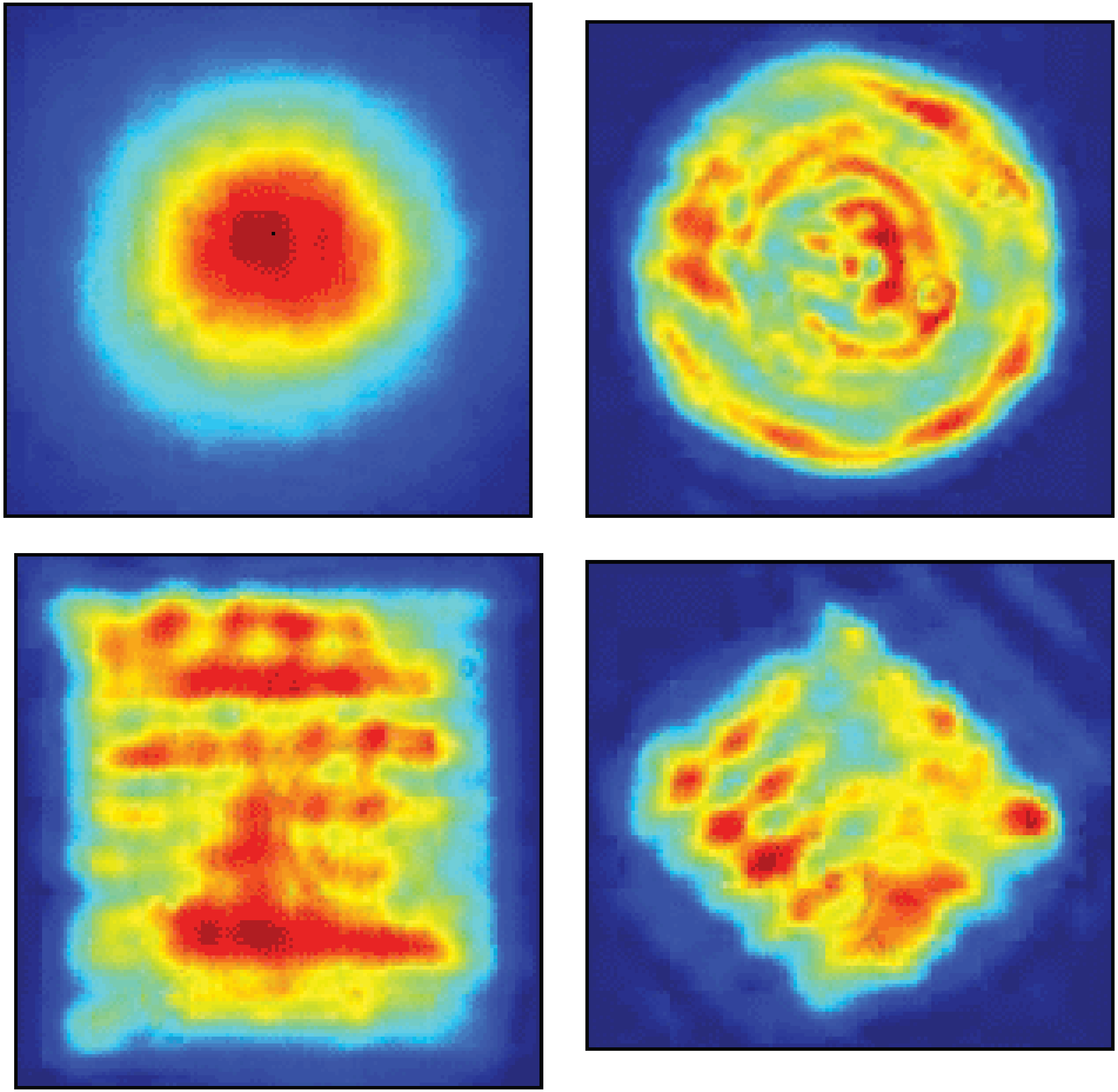
Outras soluções da EHP: modos laser

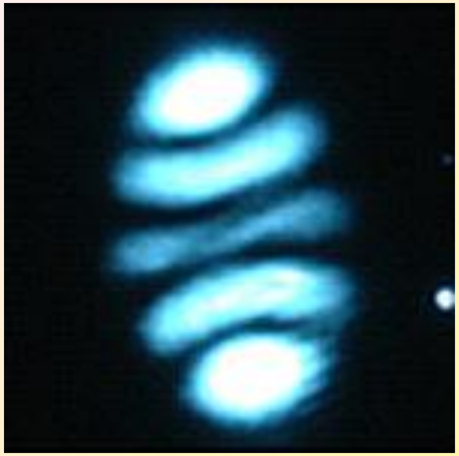


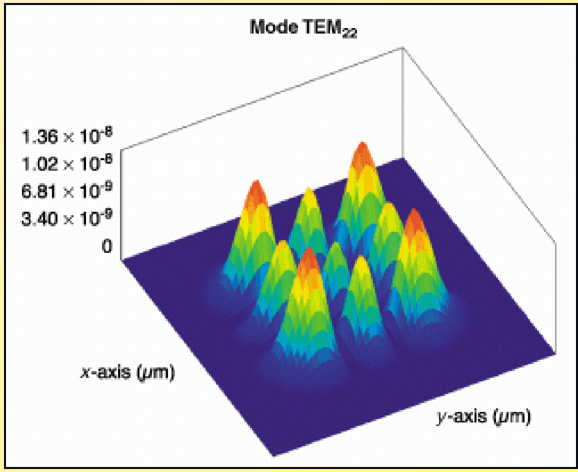
Outras soluções da EHP: modos laser



Outras soluções da EHP: modos laser







Feixes de **Hermite-Gauss**

Há outras soluções da EHP que **mantém a forma paraboloidal** das frentes de onda mas que possuem **outras distribuições da irradiância**:

Ondas paraboloidais ajustam-se aos espelhos da cavidade ressonante com grande raio de curvatura, viabilizando a auto-reprodução da onda na cavidade ressonante: os seus **modos**.

Partindo de uma **onda gaussiana**,

$$\boxed{A_G(x,y,z) = \frac{A_1}{q(z)} \exp\left[-jk\frac{x^2+y^2}{2q(z)}\right]}$$

podem-se construir outras cujas amplitudes sejam versões **moduladas** das da onda gaussiana.:

$$\boxed{A(x,y,z) = \boxed{\boxed{\mathcal{X}}\left[\sqrt{2}\frac{x}{W(z)}\right]\boxed{\mathcal{Y}}\left[\sqrt{2}\frac{y}{W(z)}\right]\exp[j\boxed{\mathcal{Z}}(z)]} A_G(x,y,z)}$$

Existirão 3 funções **reais** compatíveis com a EHP?

Feixes de Hermite-Gauss

Calculando as derivadas, com $u = \sqrt{2}\,x/W(z)$ and $v = \sqrt{2}\,y/W(z)$

$$\frac{1}{\mathcal{X}}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial u^2} - 2u\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial u}\right) + \frac{1}{\mathcal{Y}}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{Y}}{\partial v^2} - 2v\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial v}\right) + kW^2(z)\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial z} = 0$$

Logo:

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\mathcal{X}}{du^2} + u\frac{d\mathcal{X}}{du} = \mu_1 \mathcal{X}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\mathcal{Y}}{dv^2} + v\frac{d\mathcal{Y}}{dv} = \mu_2 \mathcal{Y}$$

$$z_0\left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]\frac{d\mathcal{Z}}{dz} = \mu_1 + \mu_2$$

As equações em *u,v* são as equações aos valores próprios que definem os **polinómios de Hermite**.

Os valores próprios são **inteiros,** *l,m* = 0,1,2,3, …

Feixes de Hermite-Gauss

Quanto à 3ª equação,

$$\mathcal{Z}(z) = (l+m)\,\zeta(z)$$

$$\zeta(z) = \tan^{-1}(z/z_0)$$

Juntando tudo:

$$U_{l,m}(x,y,z) = A_{l,m}\left[\frac{W_0}{W(z)}\right]\mathbb{G}_l\left[\frac{\sqrt{2}\,x}{W(z)}\right]\mathbb{G}_m\left[\frac{\sqrt{2}\,y}{W(z)}\right] \times \exp\left[-jkz - jk\frac{x^2+y^2}{2R(z)} + j(l+m+1)\,\zeta(z)\right]$$

$G_l(u)$ são as funções de **Hermite-Gauss:**

$$\mathbb{G}_l(u) = \mathbb{H}_l(u)\,\exp\left(\frac{-u^2}{2}\right), \qquad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Polinómios de Hermite

Eq. diferencial de Hermite: $u'' - 2xu' = -2\lambda u$

Funções próprias do oscilador harmónico quântico

Base de completa de funções ortonormada de funções em R

[peso w(x)]

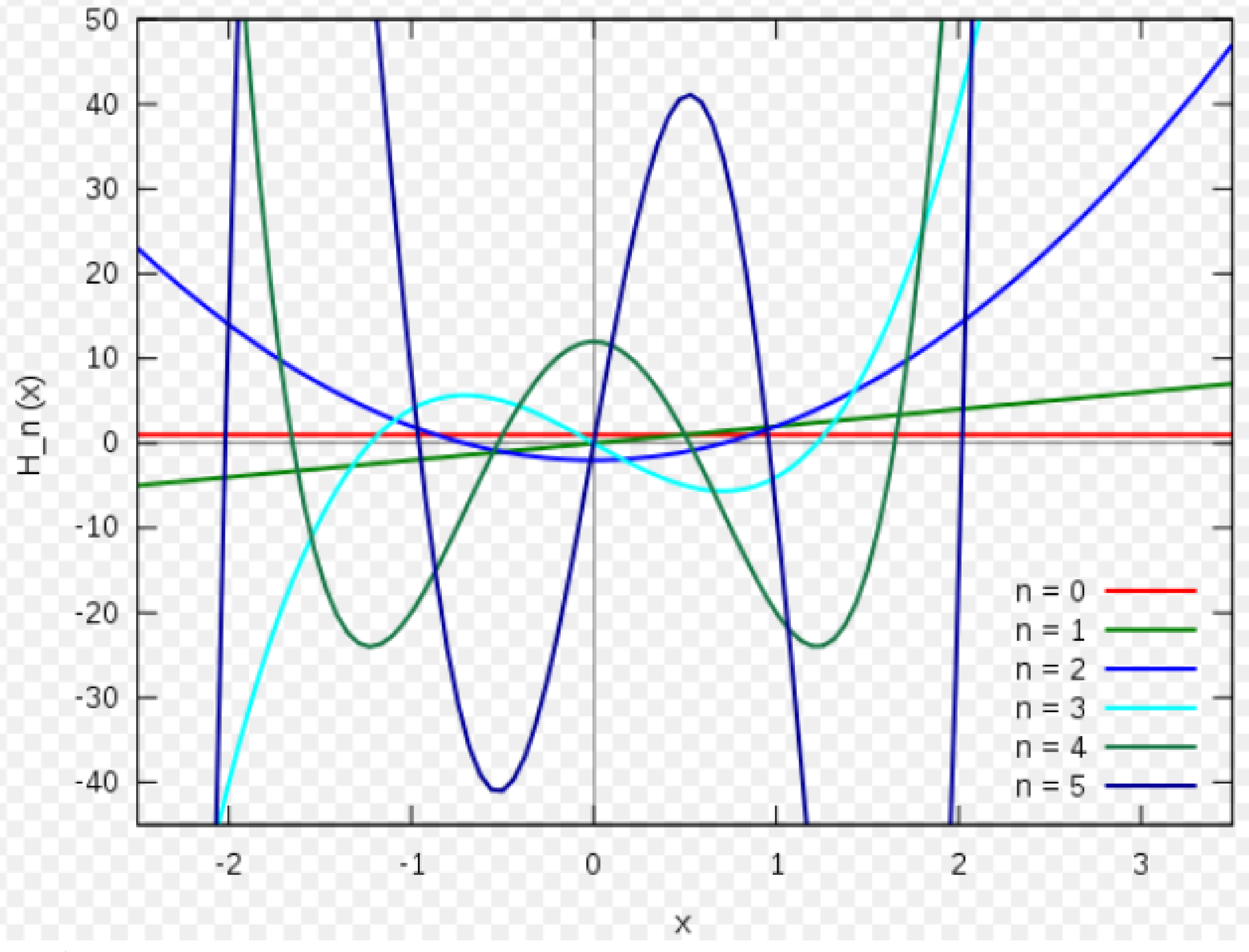
$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x = 0 \qquad w(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

$$\boxed{\mathbb{H}_{l+1}(u) = 2u\,\mathbb{H}_l(u) - 2l\,\mathbb{H}_{l-1}(u)}$$

$$H_0(x) = 1$$
$$H_1(x) = 2x$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$
$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$
$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$
$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$
$$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$$
$$H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$$
$$H_8(x) = 256x^8 - 3584x^6 + 13440x^4 - 13440x^2 + 1680$$
$$H_9(x) = 512x^9 - 9216x^7 + 48384x^5 - 80640x^3 + 30240x$$
$$H_{10}(x) = 1024x^{10} - 23040x^8 + 161280x^6 - 403200x^4 + 302400x^2 - 30240$$

Polinómios de Hermite

•



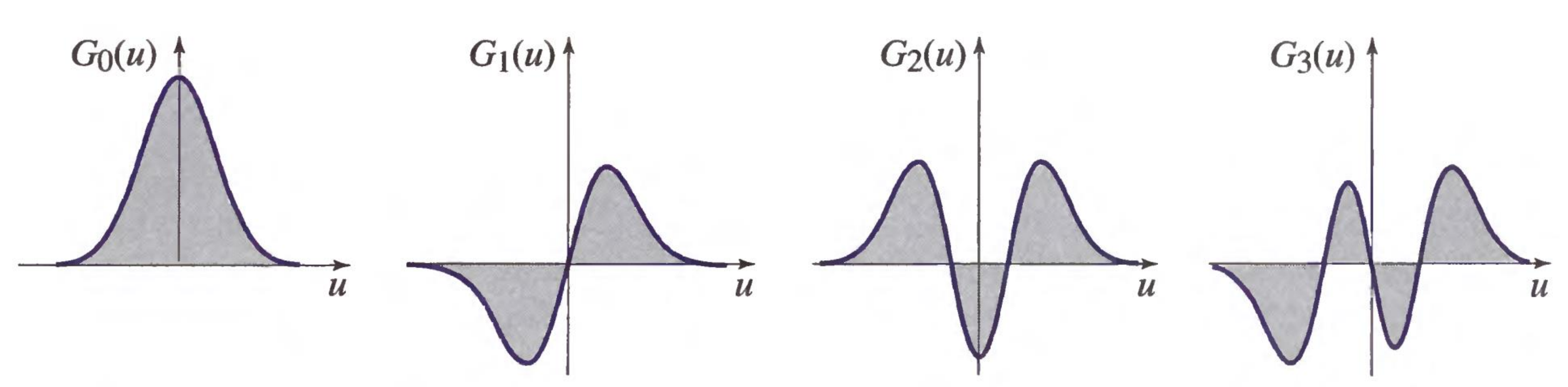
Feixes de Hermite-Gauss

.

$$\mathbb{H}_0(u) = 1, \qquad \mathbb{H}_1(u) = 2u.$$

$$\mathbb{H}_2(u) = 4u^2 - 2, \qquad \mathbb{H}_3(u) = 8u^3 - 12u, \qquad \ldots .$$

Funções de Hermite-Gauss



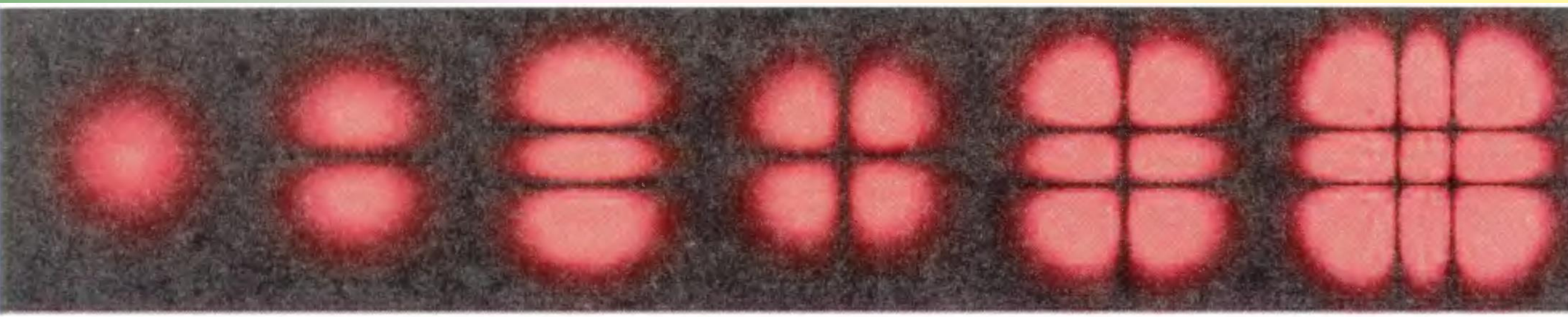
$$\mathbb{G}_l(u) = \mathbb{H}_l(u)\,\exp\left(\frac{-u^2}{2}\right), \qquad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Feixes de Hermite-Gauss

Irradiância (W/m²)

$$I_{l,m}(x,y,z) = |A_{l,m}|^2 \left[\frac{W_0}{W(z)}\right]^2 \mathbb{G}_l^2\left[\frac{\sqrt{2}\,x}{W(z)}\right] \mathbb{G}_m^2\left[\frac{\sqrt{2}\,y}{W(z)}\right]$$

Modos (l,m)



(0, 0) (0, 1) (0, 2) (1, 1) (1, 2) (2, 2)

O Feixe Gaussiano é o modo TEM(0,0)

Feixes de Hermite- e Laguerre-Gauss

O Feixe Gaussiano é o modo TEM (0,0)

Os modos de Hermite-Gauss formam um conjunto completo de soluções da EHP

- Qualquer feixe se pode considerar uma combinação linear de funções da base de Hermite-Gauss.
- Os coeficientes da soma dependem da cavidade ressonante.

Há outras famílias completas de soluções:

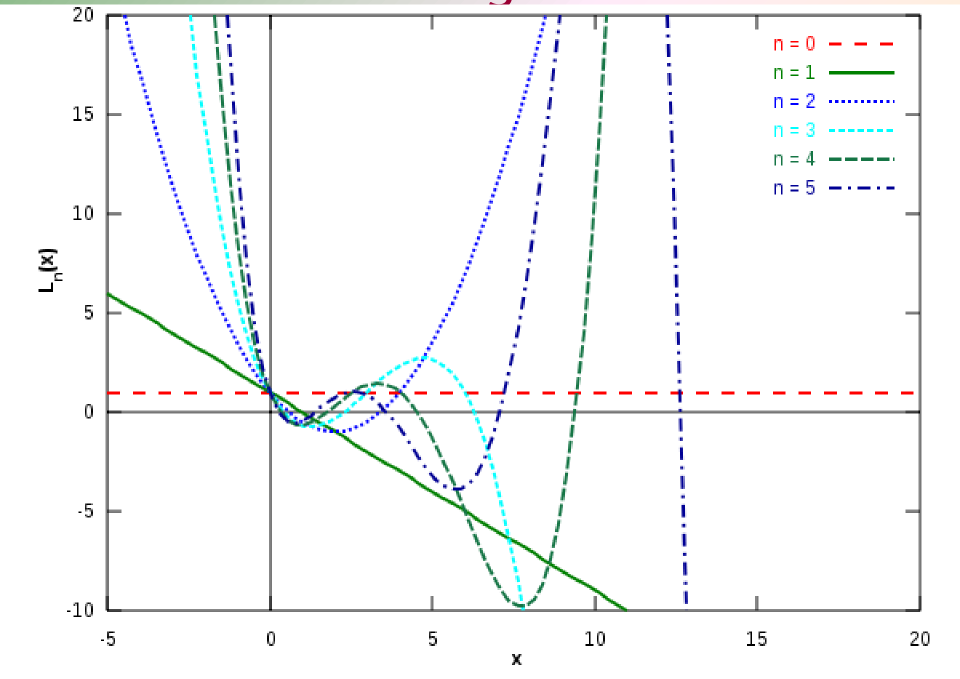
- Os modos de **Laguerre-Gauss**, que se obtem a partir da EHP escrita em coordenadas cilíndricas (ρ,φ,z), com separação de variáveis entre ρ e φ.

Equação de Laguerre: $\mathbf{xy'' + (1 - x)y' + ny = 0}$

Feixes de Laguerre-Gauss

$$U_{l,m}(\rho,\varphi,z) = A_{l,m}\left[\frac{W_0}{W(z)}\right]\left(\frac{\rho}{W(z)}\right)^l L_m^l\left(\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right)\exp\left(-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right)$$
$$\times\exp\left[-ikz - ik\frac{\rho^2}{2R(z)} - il\varphi + (l+2m+1)\zeta(z)\right]$$

L – Polinómios generalizados de Laguerre, gerados a partir da *Fórmula de Rodrigues*:



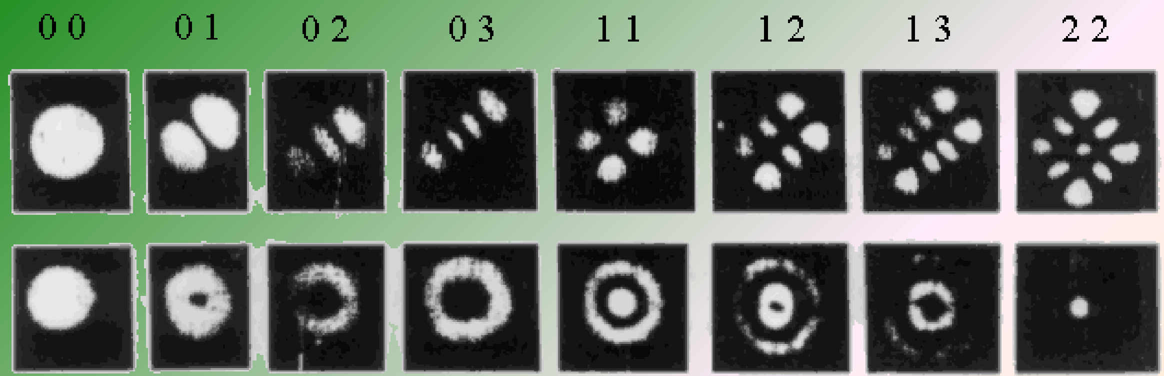
$$L_m^l(x) = \frac{x^{-l}e^x}{m!}\frac{d^m(x^{l+m}e^{-x})}{dx^m}$$

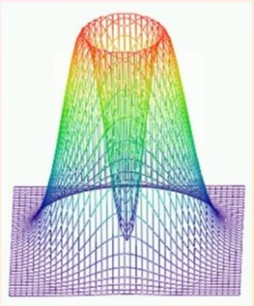
$$L_0^l(x) = 1$$

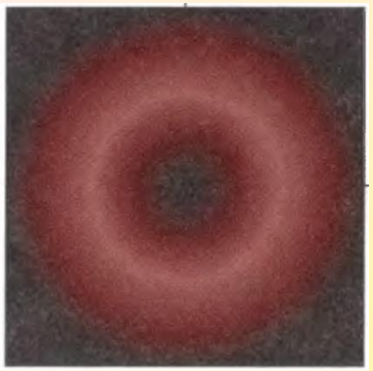
$$L_1^0(x) = 1 - x$$

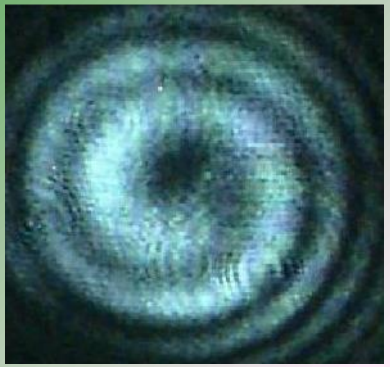
$$L_2^0(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2}$$

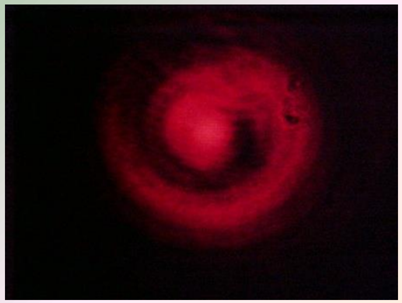
Feixes de Laguerre-Gauss

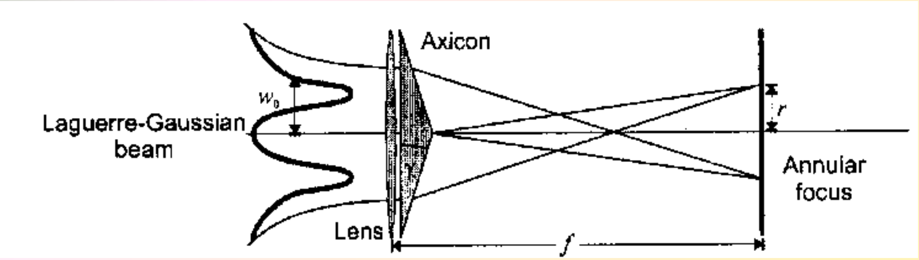


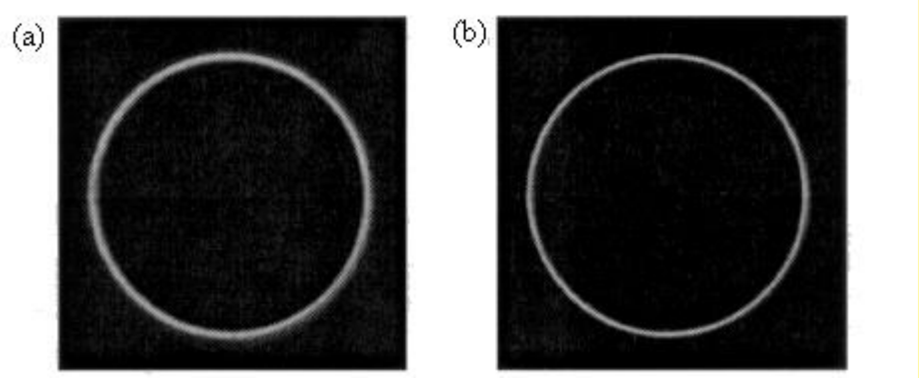












Feixes de Bessel

Existem ainda soluções **tipo onda plana** mas **não uniformes** em planos perpendiculares ao eixo de propagação.

Procuram-se soluções da EH (não da EHP) da forma:

$$\boxed{U(\mathbf{r}) = A(x,y)\,e^{-j\beta z}}$$

A(x,y) [não depende de z] deve satisfazer:

$$\nabla_T^2 A + k_T^2 A = 0$$

$$k_T^2 + \beta^2 = k^2$$

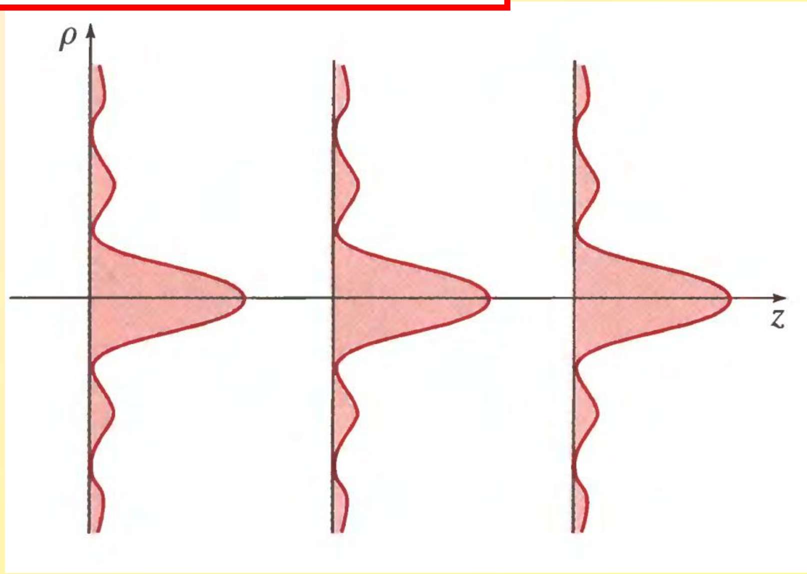
$$\nabla_T^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$$

Em variáveis polares, com separação de variáveis:

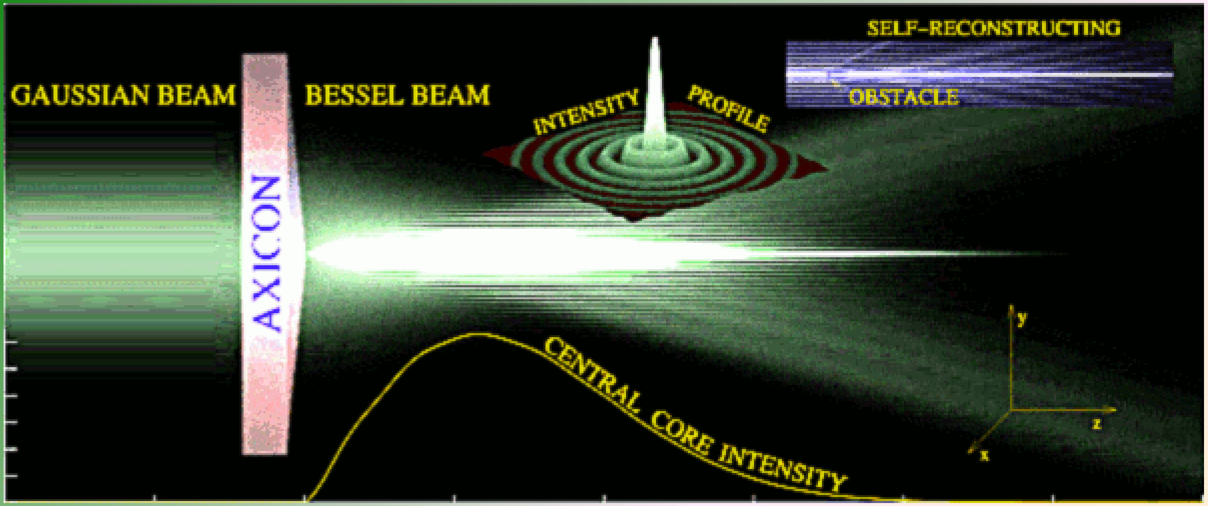
$$\boxed{A(x,y) = A_m\,J_m(k_T\rho)\,e^{jm\phi}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2}$$

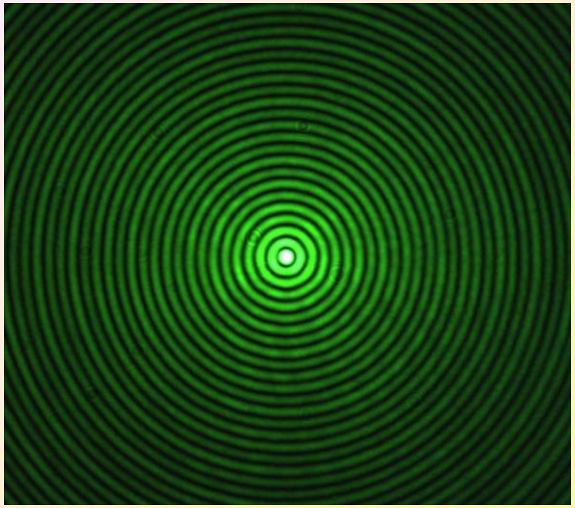
$J_m()$ - **funções de Bessel** de 1ª ordem.

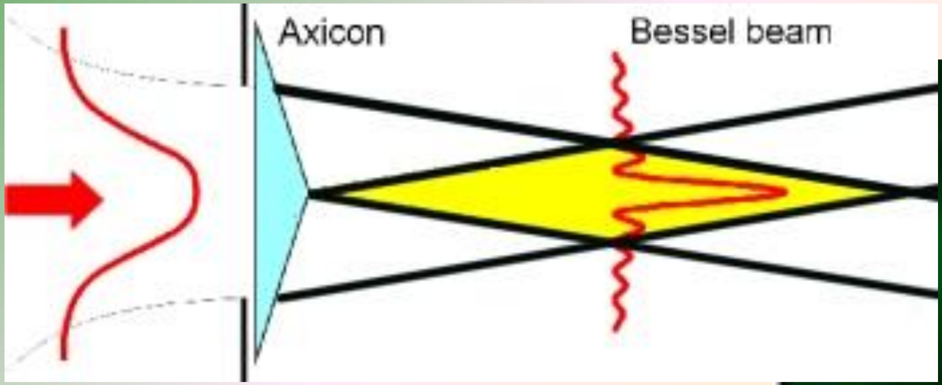
$$\boxed{x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0}$$

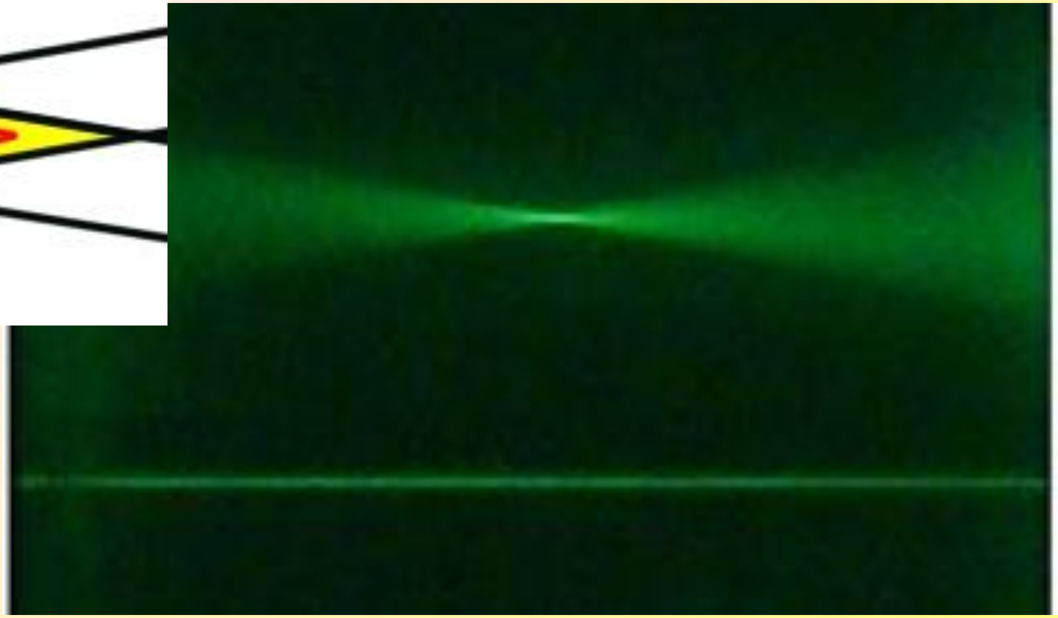


Feixes de Bessel





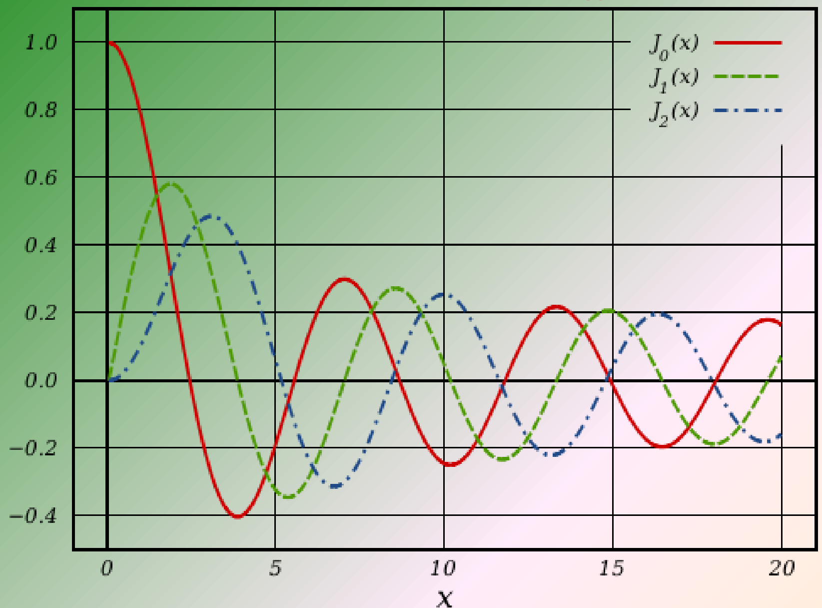




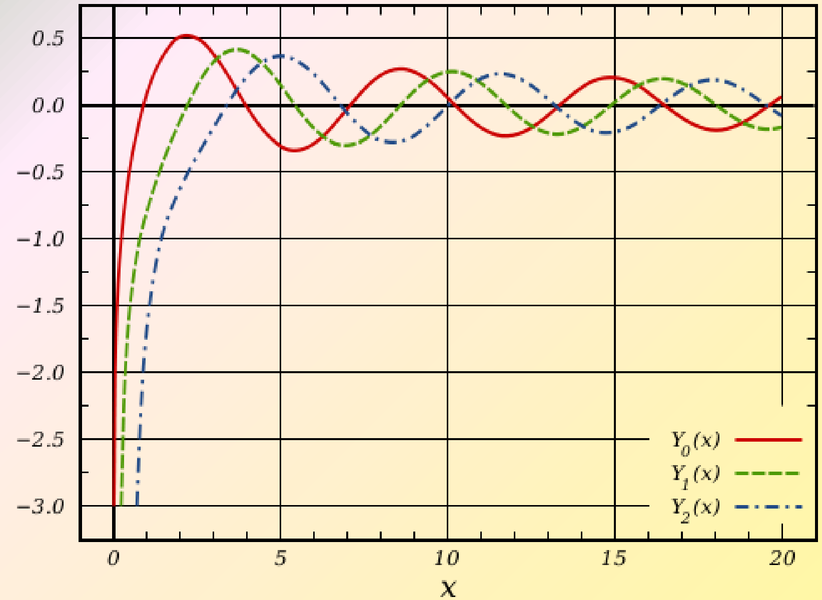
Funções de Bessel

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-\alpha^2)y=0$$

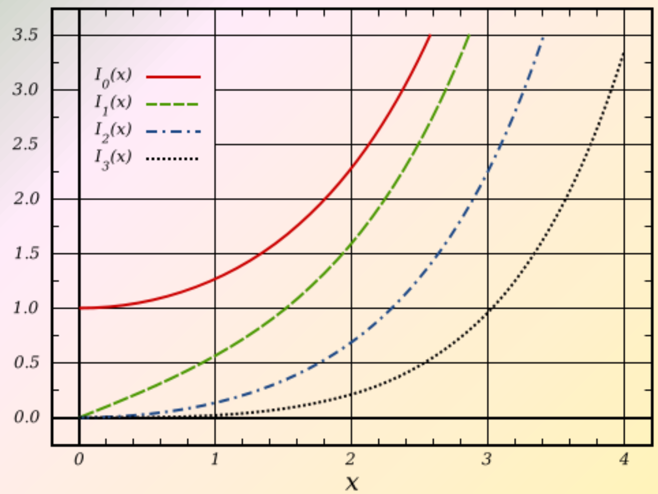
1ª espécie (1st kind), J_n



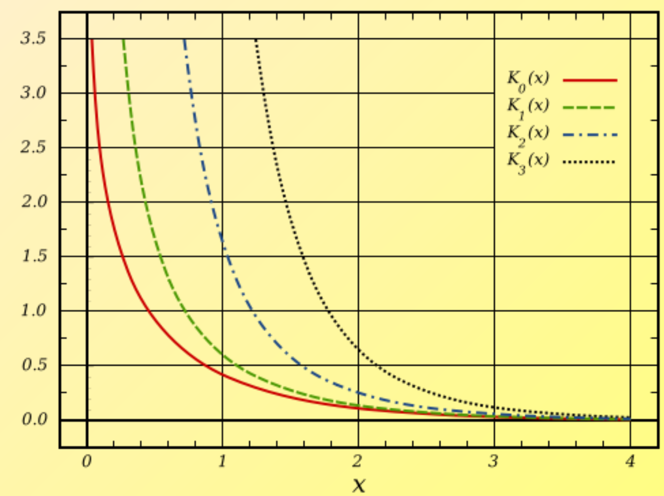
2ª espécie, Y_n



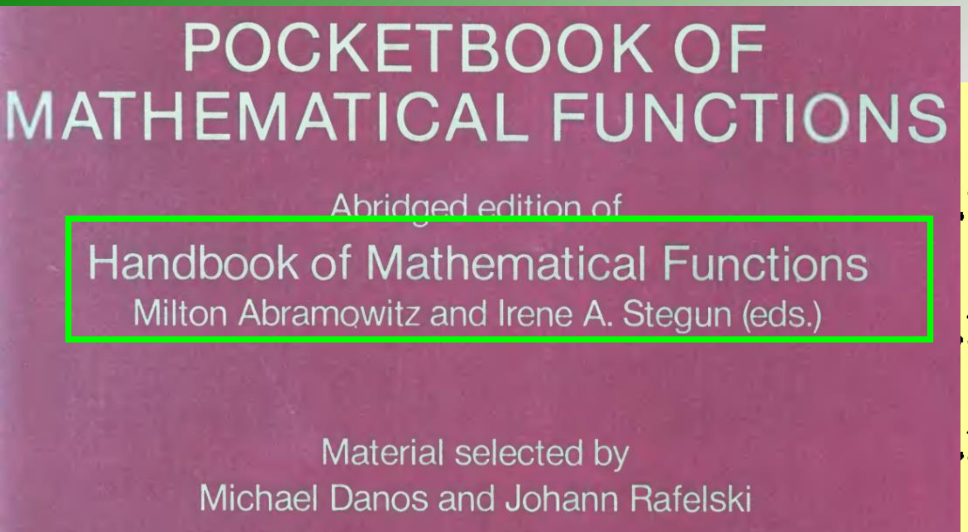
Modificadas, 1ª espécie, I_n



Modificadas, 2ª espécie, K_n



Handbook of Mathematical Functions



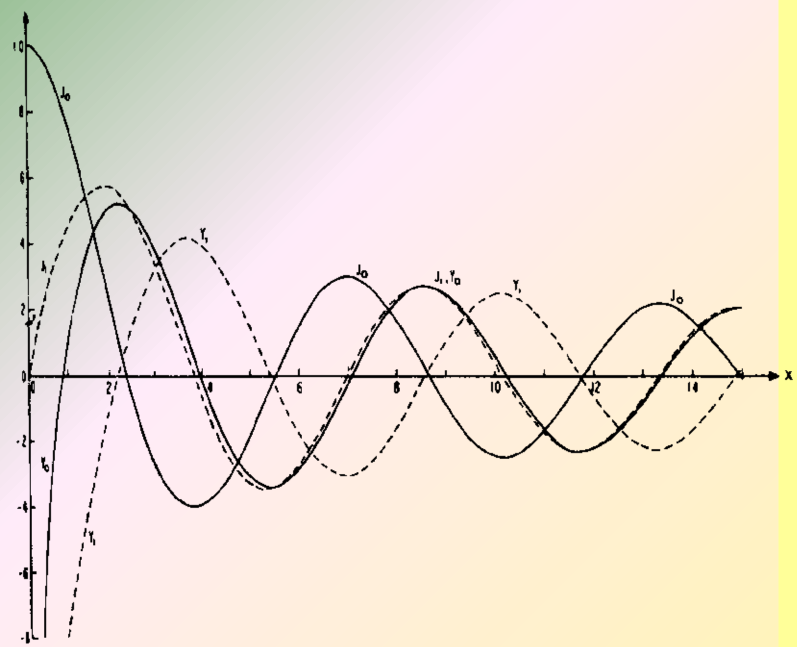


FIGURE 9.1. $J_0(x)$, $Y_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_1(x)$.

Generating Function and Associated Series

.1.41 $$e^{\frac{1}{2}z(t-1/t)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} t^k J_k(z) \qquad (t\neq 0)$$

.1.42 $$\cos(z\sin\theta)=J_0(z)+2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(z)\cos(2k\theta)$$

.1.43 $$\sin(z\sin\theta)=2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(z)\sin\{(2k+1)\theta\}$$

9.1.44 $$\cos(z\cos\theta)=J_0(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}(-)^k J_{2k}(z)\cos(2k\theta)$$

9.1.45 $$\sin(z\cos\theta)=2\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k J_{2k+1}(z)\cos\{(2k+1)\theta\}$$

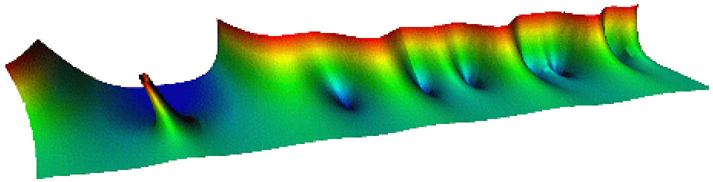
9.1.46 $$1=J_0(z)+2J_2(z)+2J_4(z)+2J_6(z)+\ \ldots$$

9.1.47 $$\cos z=J_0(z)-2J_2(z)+2J_4(z)-2J_6(z)+\ \ldots$$

9.1.48 $$\sin z=2J_1(z)-2J_3(z)+2J_5(z)-\ \ldots$$

Handbook of Mathematical Functions

https://dlmf.nist.gov/



NIST Digital Library of Mathematical Functions

Project News

2018-03-27 *DLMF Update; Version 1.0.18*
2017-12-22 *DLMF Update; Version 1.0.17*
2017-12-22 *Tom M. Apostol, DLMF Author and Validator, dies at age 92*
2017-09-18 *DLMF Update; Version 1.0.16*
More news

Foreword
Preface
Mathematical Introduction
1 Algebraic and Analytic Methods
2 Asymptotic Approximations
3 Numerical Methods
4 Elementary Functions
5 Gamma Function
6 Exponential, Logarithmic, Sine, and Cosine Integrals
7 Error Functions, Dawson's and Fresnel Integrals
8 Incomplete Gamma and Related Functions
9 Airy and Related Functions
10 Bessel Functions
11 Struve and Related Functions
12 Parabolic Cylinder Functions
13 Confluent Hypergeometric Functions
14 Legendre and Related Functions
15 Hypergeometric Function
16 Generalized Hypergeometric Functions & Meijer G-Function
17 q-Hypergeometric and Related Functions
18 Orthogonal Polynomials
19 Elliptic Integrals
20 Theta Functions
21 Multidimensional Theta Functions
22 Jacobian Elliptic Functions
23 Weierstrass Elliptic and Modular Functions
24 Bernoulli and Euler Polynomials
25 Zeta and Related Functions
26 Combinatorial Analysis
27 Functions of Number Theory
28 Mathieu Functions and Hill's Equation
29 Lamé Functions
30 Spheroidal Wave Functions
31 Heun Functions
32 Painlevé Transcendents
33 Coulomb Functions
34 $3j$, $6j$, $9j$ Symbols
35 Functions of Matrix Argument
36 Integrals with Coalescing Saddles
Bibliography
Index
Notations
List of Figures
List of Tables

$$U(\mathbf{r}) = A\exp(-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$$

$$(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{r}) = 0$$

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$U(\mathbf{r}) = \frac{A}{r}\exp(-jkr)$$

$$k = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c}$$

$$U(\mathbf{r},t) = U(\mathbf{r})\exp(j2\pi\nu t)$$

$$U(\mathbf{r}) \approx \frac{A}{z}\exp(-jkz)\exp\left[-jk\frac{x^2+y^2}{2z}\right]$$

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})\exp(-jkz) \qquad u(\mathbf{r},t) = |A(\mathbf{r})|\cos[2\pi\nu t - kz + \arg\{A(\mathbf{r})\}]$$

$$\nabla_T^2 A - j\,2k\frac{\partial A}{\partial z} = 0$$

$$U(\mathbf{r}) = A_0\frac{W_0}{W(z)}\exp\left[-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right]\exp\left[-jkz - jk\frac{\rho^2}{2R(z)} + j\zeta(z)\right]$$

$$U_{l,m}(x,y,z) = A_{l,m}\left[\frac{W_0}{W(z)}\right]\mathbb{G}_l\left[\frac{\sqrt{2}x}{W(z)}\right]\mathbb{G}_m\left[\frac{\sqrt{2}y}{W(z)}\right]\exp\left[-jkz - jk\frac{x^2+y^2}{2R(z)} + j(l+m+1)\zeta(z)\right]$$

$$\mathbb{G}_l(u) = \mathbb{H}_l(u)\exp\left(\frac{-u^2}{2}\right), \qquad l = 0,1,2,\ldots$$

$$U_{l,m}(\rho,\varphi,z) = A_{l,m}\left[\frac{W_0}{W(z)}\right]\left(\frac{\rho}{W(z)}\right)^l L_m^l\left(\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right)\exp\left(-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right)\exp\left[-ikz - ik\frac{\rho^2}{2R(z)} - il\varphi + (l+2m+1)\zeta(z)\right]$$

$$U(\mathbf{r}) = A(x,y)\,e^{-j\beta z} \qquad \nabla_T^2 A + k_T^2 A = 0 \qquad k_T^2 + \beta^2 = k^2 \qquad \nabla_T^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$$

$$A(x,y) = A_m\,J_m(k_T\rho)\,e^{jm\phi}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2$$

EHP & ...

$$\nabla_T^2 A - j\,2k\frac{\partial A}{\partial z} = 0 \Longleftrightarrow \left[\frac{-\hbar^2}{2\mathrm{m}}\nabla^2 + \mathrm{V}\right]\Psi = \mathrm{i}\,\hbar\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\Psi$$

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \psi(\mathbf{r})\exp[j(E/\hbar)t]$$

$$(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{r}) = 0 \Longleftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

Light Modes of Free Space

Uri Levy, Stanislav Derevyanko, Yaron Silberberg
Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel

Contents

1. Introduction 237
   1.1 Waves 238
   1.2 Beams 240
   1.3 Classification 241
   1.4 Orthogonality and Completeness 241
   1.5 Countability 245
   1.6 Diffraction Characteristics 245
2. Waves 247
   2.1 Angular Spectrum 247
   2.2 Cartesian Coordinates: Plane Waves 249
   2.3 Circular–Cylindrical Coordinates: Bessel Waves 251
   2.4 Parabolic–Cylindrical Coordinates: Weber Waves 251
   2.5 Elliptical–Cylindrical Coordinates: Mathieu Waves 254
3. Beams 255
   3.1 Cartesian Coordinates 256
   3.2 Circular–Cylindrical coordinates 266
   3.3 Parabolic–Cylindrical coordinates 269
   3.4 Elliptical–Cylindrical coordinates 273
4. Summary 277

Table 1 Classification of Light Patterns Propagating in Free Space

Coordinate System	Waves (Helmholtz Eq.)	Beams (SVEA-PWE)
Cartesian	A. Plane Waves (PWV)	E. Plane Infinite Beams (PIB) F. Airy Infinite Beams (AII) G. Airy Finite Beams (AiF) H. Airy–Airy Beams (AAB) I. Airy–Plane Beams (APB) J. Hermite–Gauss Beams (HGB) K. Plane–Gauss Beams (PGB)
Circular–Cylindrical (Polar)	B. Bessel Waves (BSL)	L. Laguerre–Gauss Beams (LGB) M. Bessel–Gauss Beams (BGB)
Parabolic–Cylindrical	C. Weber Waves (WBR)	N. Parabolic Infinite Beams (PaI) O. Parabolic Finite Beams (PaF) P. Weber–Gauss Beams (WGB)
Elliptical–Cylindrical	D. Mathieu Waves (MTH)	Q. Ince–Gauss Beams (IGB) R. Mathieu–Gauss Beams (MGB)

The four Waves (center column) are solutions of the exact HE (Equation 4) in the respective coordinate system. The 14 Beams (right column) are solutions of the SVEA-PWE (Equation 5) in the respective coordinate system. The Beams in blue (dark gray in the print version) fonts originate from the respective Waves (cf. Equation 6).

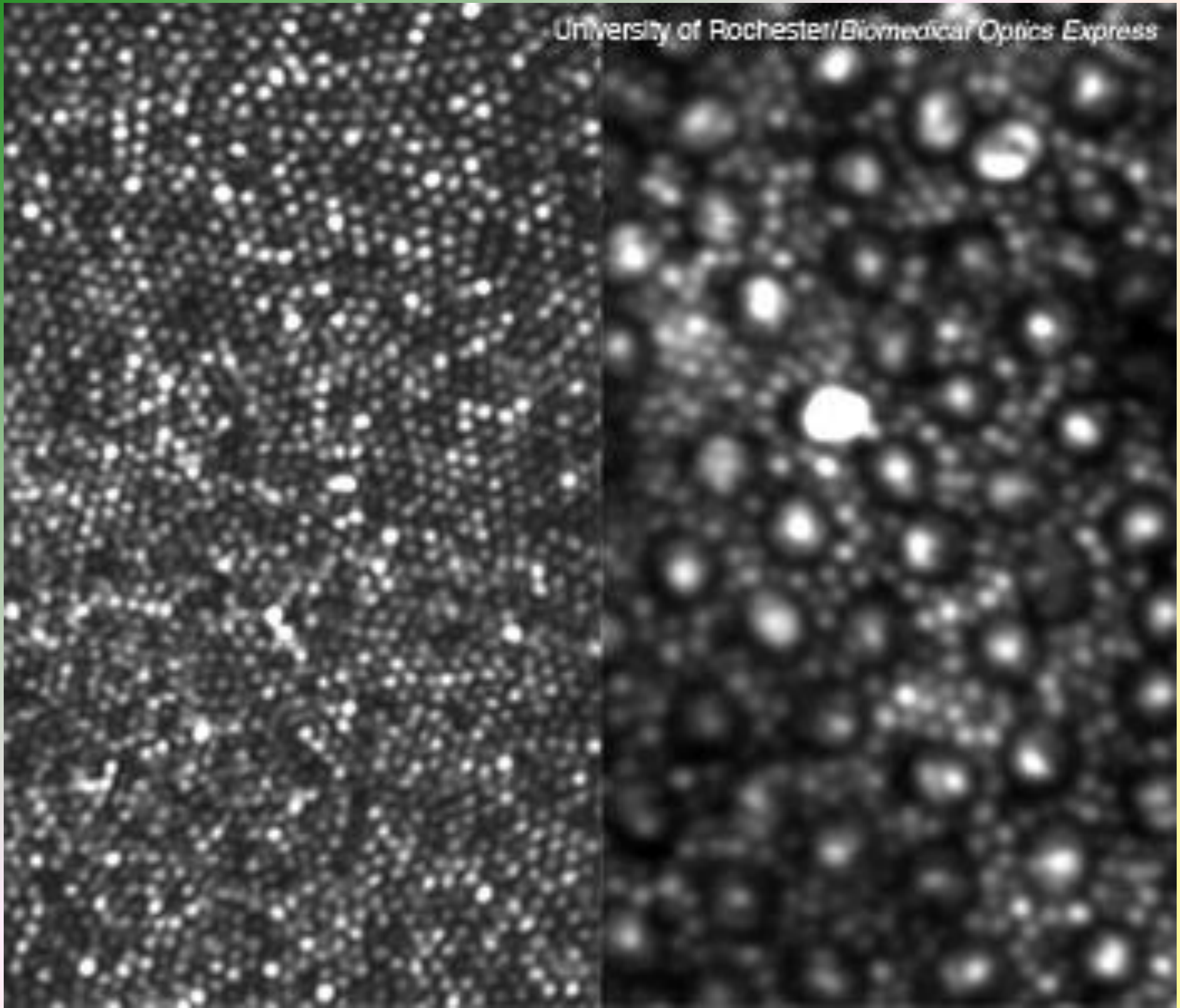
Airy
Bessel
Mathieu
Weber
Gauss
Laguerre
Hermite

SVEA – PWE – Slowly Varying Envelope Approximation-Paraxial Wave Equation

Wolf E, Progress in Optics, Volume 61 (Elsevier, 2016) - Light Modes of Free Space (ch. 4)

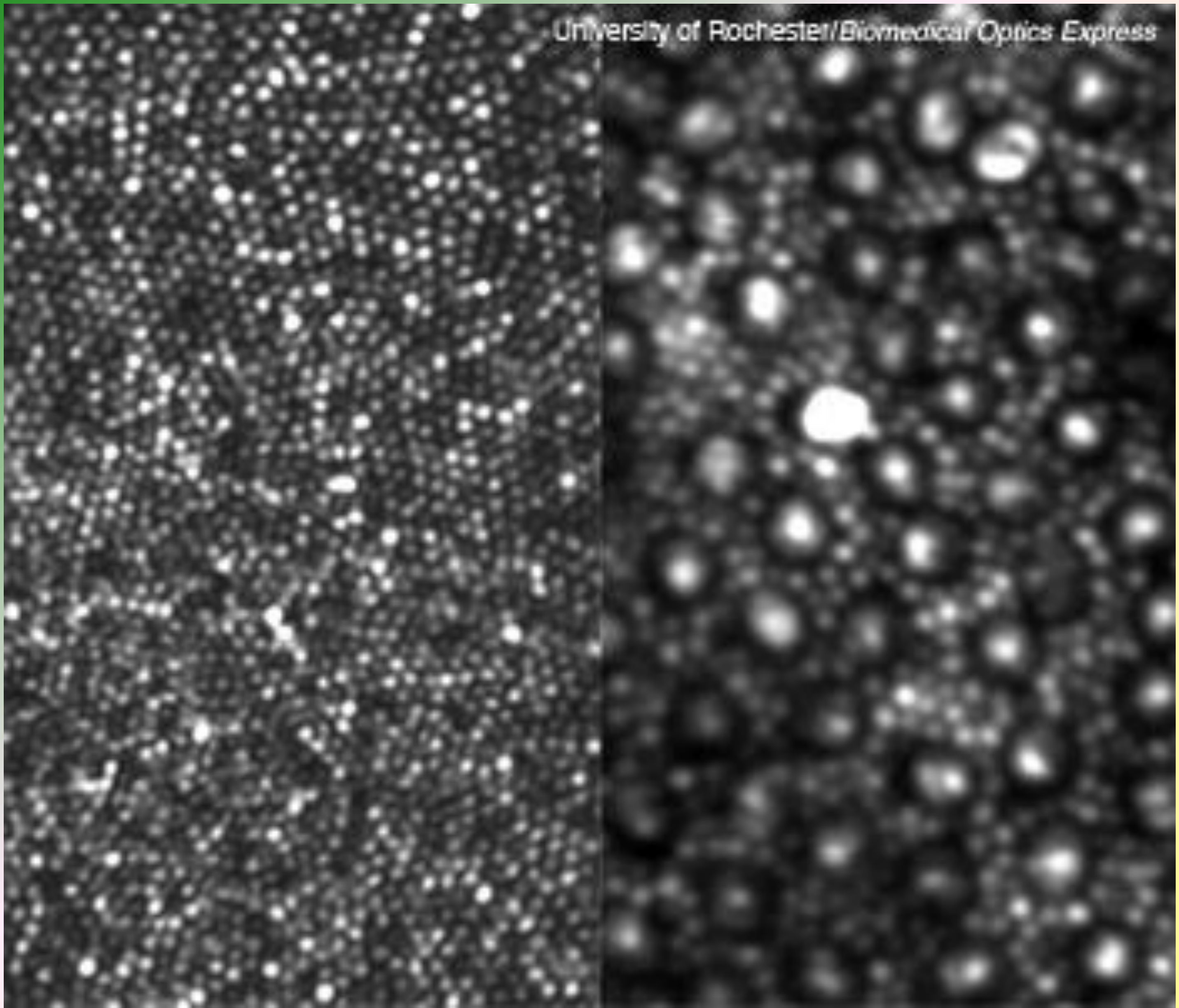
Scientists Image Rods in the Living Eye

(Biomed. Opt. Express **2**, 1864, 2011; doi:10.1364/BOE.2.001864).



Scientists Image Rods in the Living Eye

(Biomed. Opt. Express **2**, 1864, 2011; doi:10.1364/BOE.2.001864).



(Left) The smallest **cones** at the center of the retina (the fovea).

(Right) The large bright dots with a dark ring around them are **cones**, and the surrounding (and far more abundant) smaller spots are **rods**.

Propagação, feixes e difracção

Como se **propaga** uma onda electromagnética?

Como se descrevem opticamente objectos e componentes ópticos?

A - Reflexão e Refracção

Espelhos e dioptros planos

B – Transmissão através de componentes ópticos

Lâminas de faces paralelas ou não

Lentes

Redes de difracção

C – Componentes de índice variável

Quais os efeitos de componentes ópticos / objectos difractantes sobre ondas?

Espelhos

Lâminas

Lentes

Prismas

Redes de difracção

Objectos 2D / 3D

Princípios de propagação - *overview*

$$f\,(x,y,\lambda) = 0$$
$$f_\lambda(x,y,\lambda) = 0$$

Óptica geométrica

Princípio de Huygens

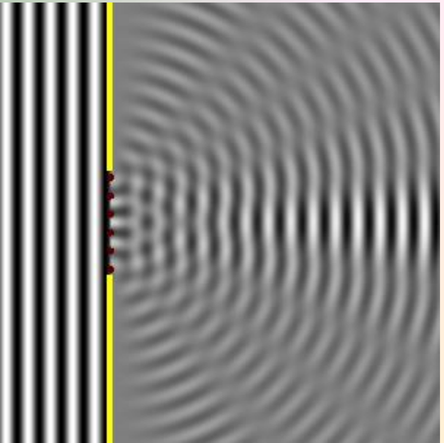
Como gerar frentes de onda geométricas a partir de outras?

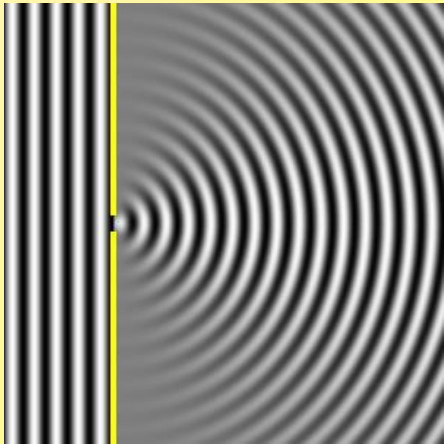
Óptica ondulatória

Princípio de Huygens-Fresnel

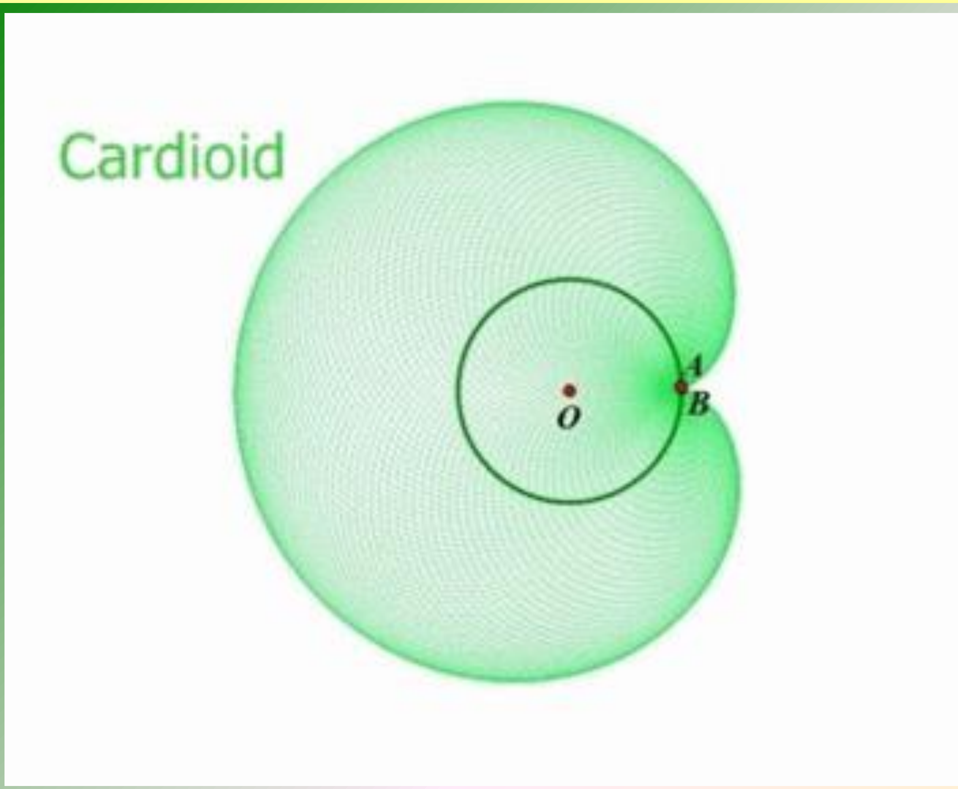
Como propagar uma onda, com base no conhecimento da sua amplitude num dado plano?

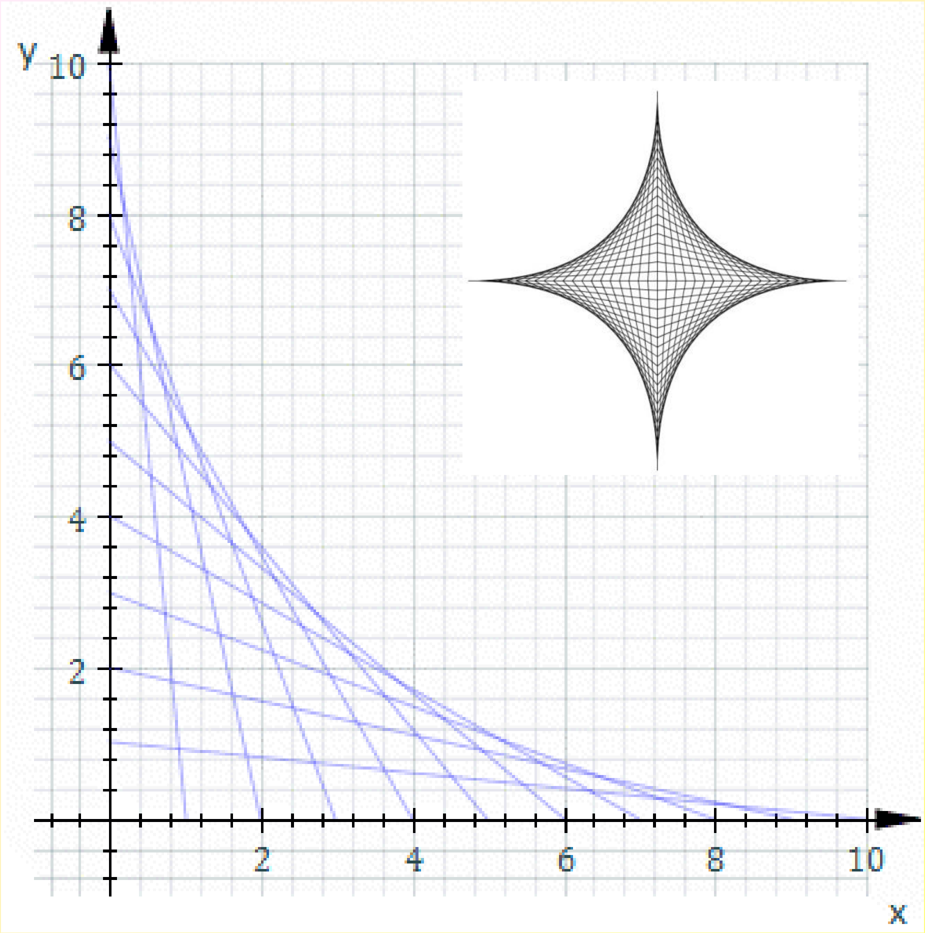
$$\mathbf{U}(x_0,y_0) = \frac{1}{j\lambda}\iint_{\Sigma} \mathbf{U}(x_1,y_1)\frac{e^{jkr_{01}}}{r_{01}}\cos\theta\, dx_1 dy_1$$

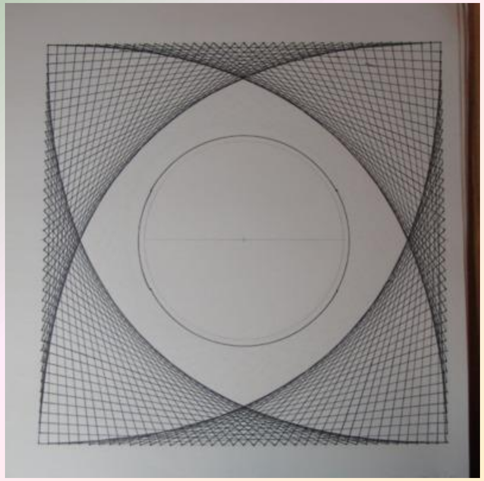




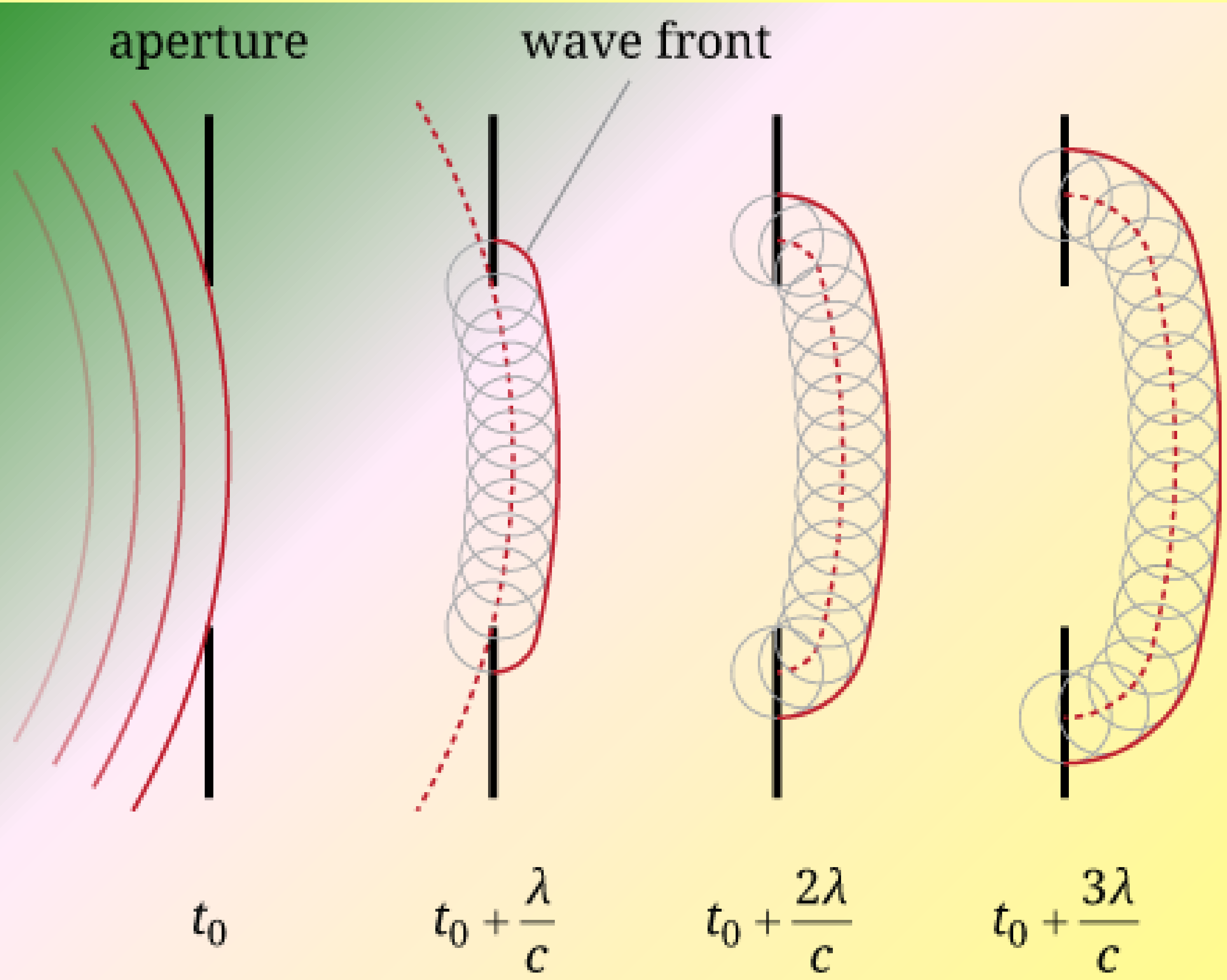
Envolventes. Princípio de Huygens – frentes de onda geométricas



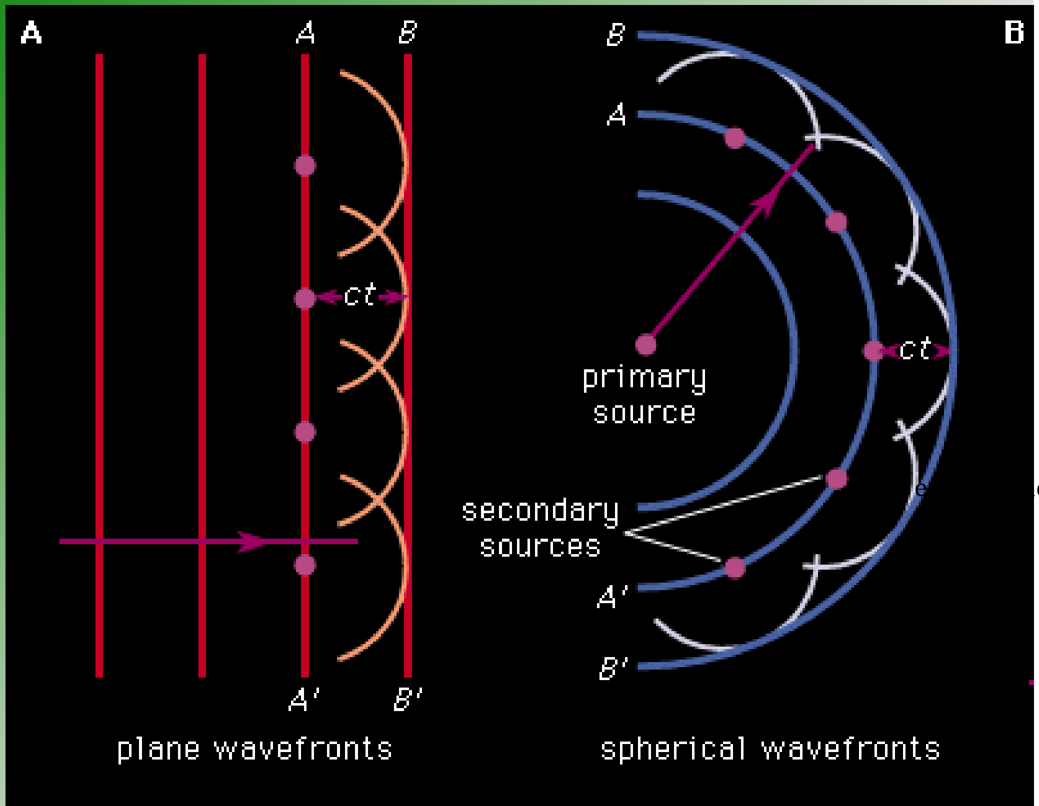


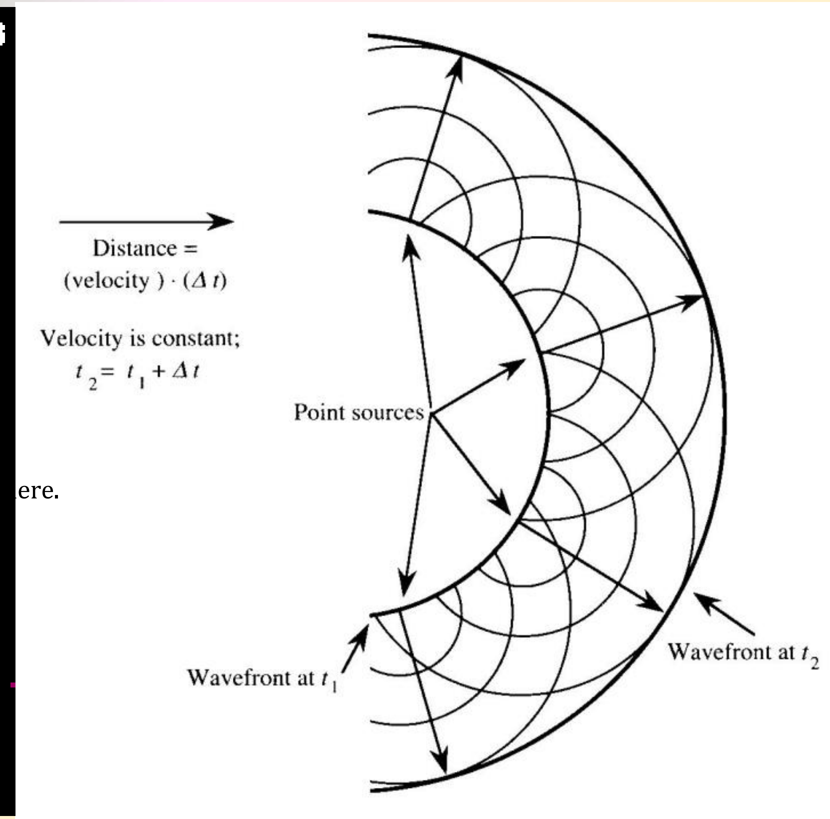


Envolventes. Princípio de Huygens – frentes de onda geométricas



Envolventes. Princípio de Huygens – frentes de onda geométricas

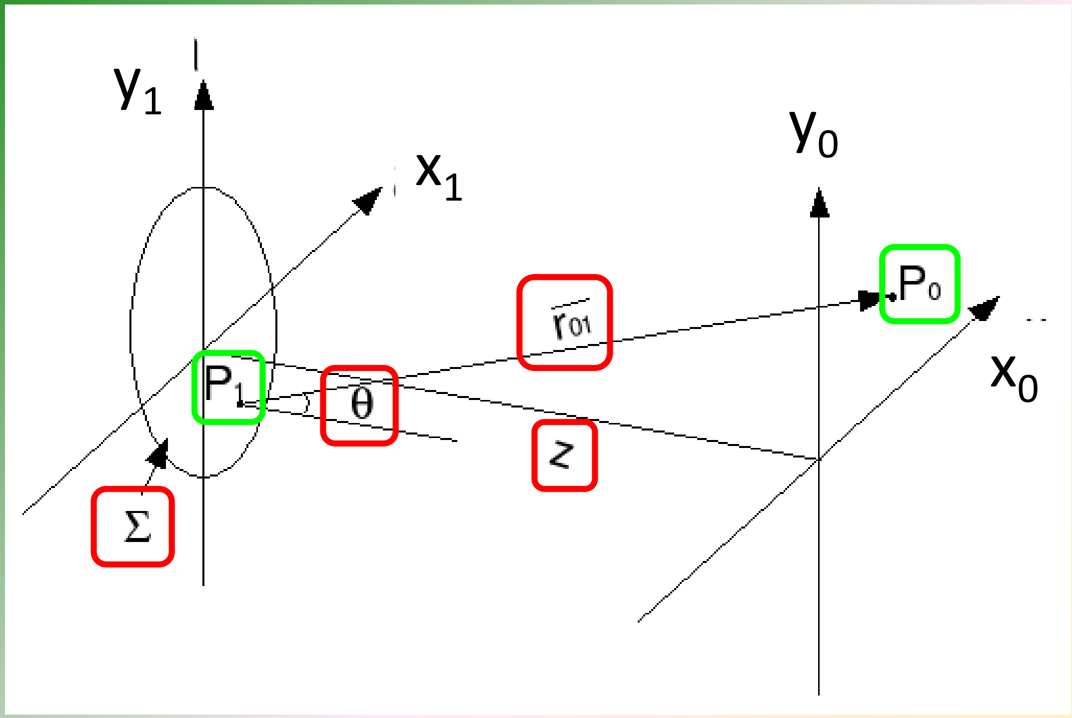


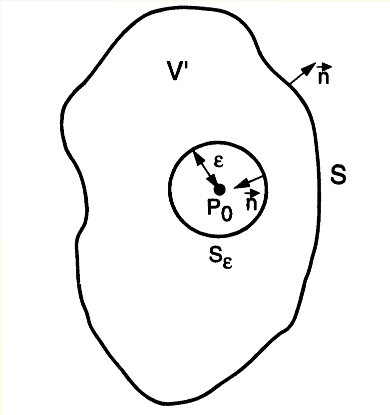


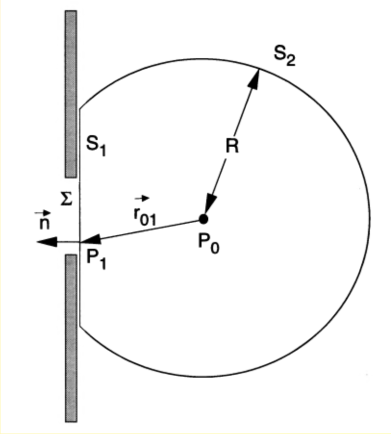
Como se pode reformular o princípio de Huygens, utilizando o conceito de ondas da Óptica Ondulatória, regido pela equação de Ondas e pela Equação de Helmoltz?

Princípio de Huygens-Fresnel – ondas EM

$$(\nabla^2 + k^2)U(\mathbf{r}) = 0$$





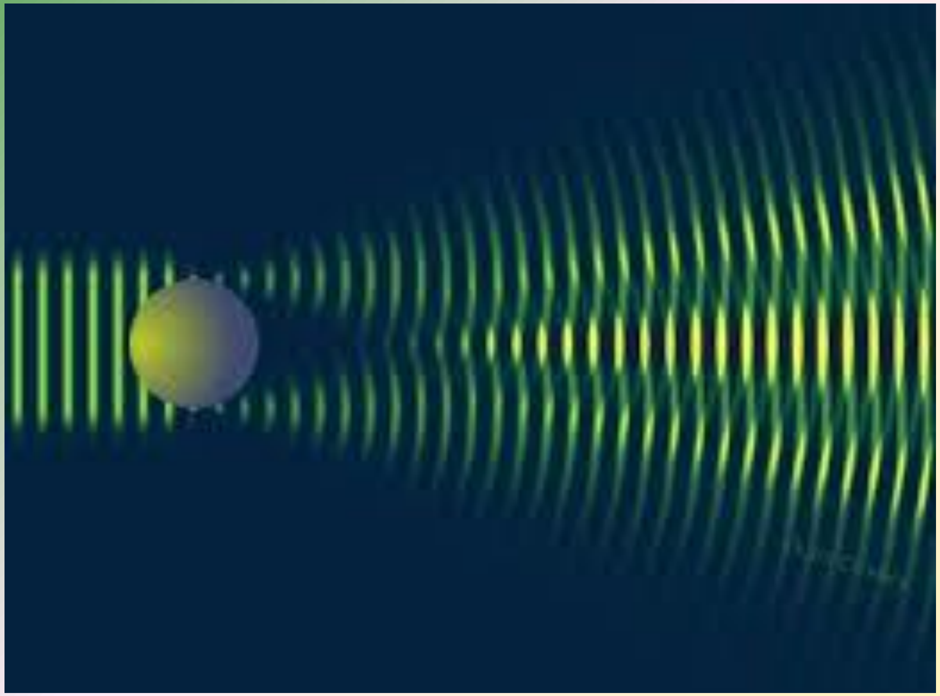


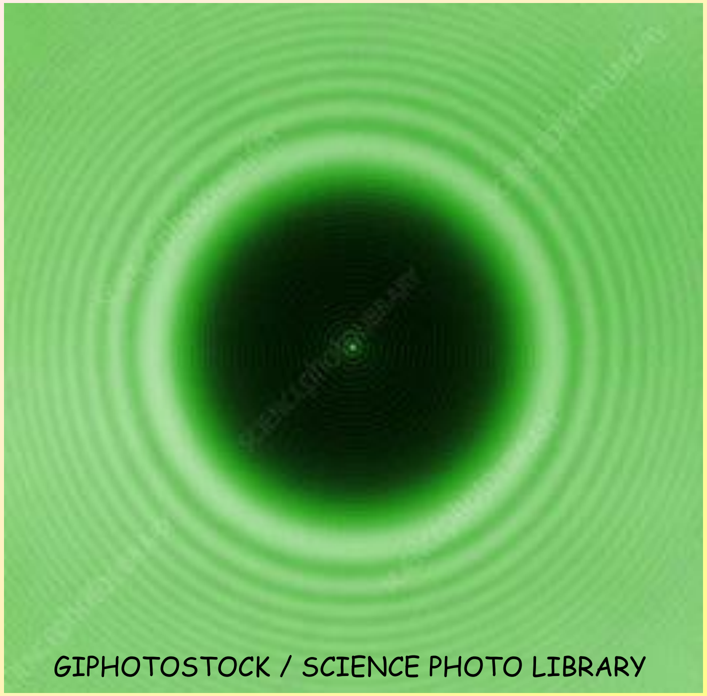
$$U(x_0, x_0) \propto \iint_{\Sigma} U(x_1, y_1)\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} dx_1 dy_1$$

$$\boxed{U(x_0, y_0) = \underline{\frac{1}{i\lambda}} \iint_{\Sigma} U(x_1, y_1)\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \underline{\cos\theta}\, dx_1 dy_1}$$

Princípio de Huygens-Fresnel – ondas EM

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(x_1, y_1) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} cos\theta \; dx_1 dy_1$$





$$U_I(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01})\, ds$$

Princípio de Huygens-Fresnel

- A 1ª solução de Rayleigh-Sommerfeld

$$\boxed{U_I(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01})\, ds}$$

- pode ser posta na forma de um **integral de sobreposição**, com uma **função impulso h**:

$$U(P_0) = \iint_{\Sigma} h(P_0, P_1)\, U(P_1)\, ds,$$

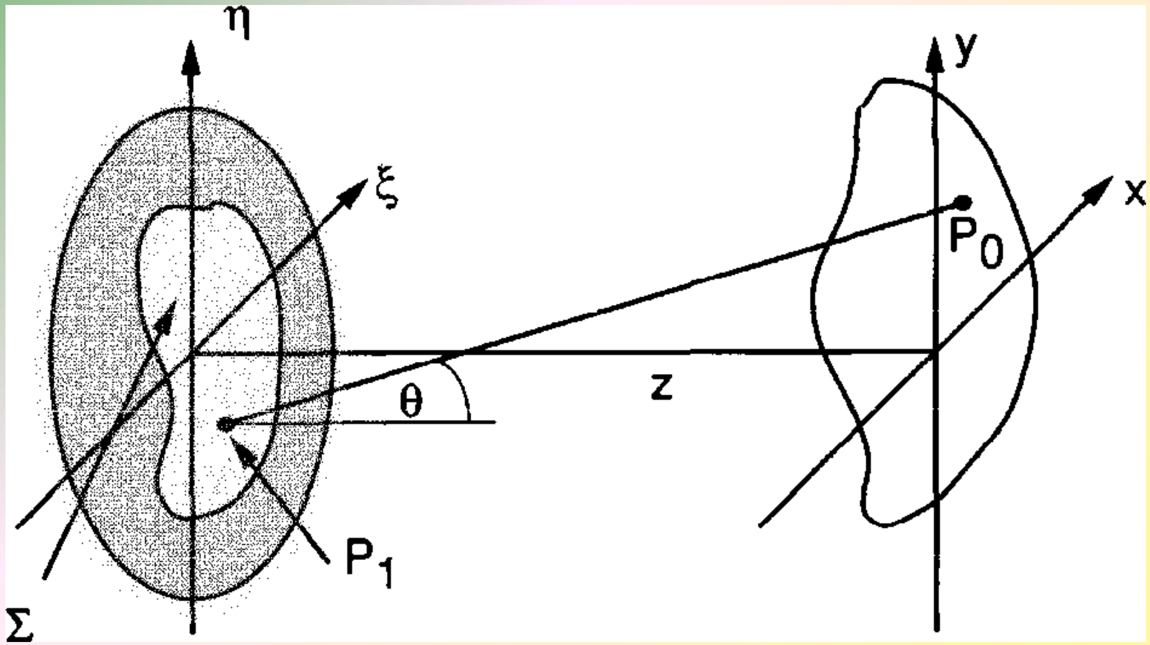
$$h(P_0, P_1) = \frac{1}{j\lambda} \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \cos\theta.$$

- Trata-se de uma teoria linear. Será que é também **invariante espacial** (isoplanática), deixando-se descrever sob a forma de **convoluções**?

Princípio de Huygens-Fresnel: coordenadas cartesianas

.

$$U_I(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01})\, ds$$



$$\cos\theta = \frac{z}{r_{01}}$$

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

$$U(x, y) = \frac{z}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}^2}\, d\xi\, d\eta,$$

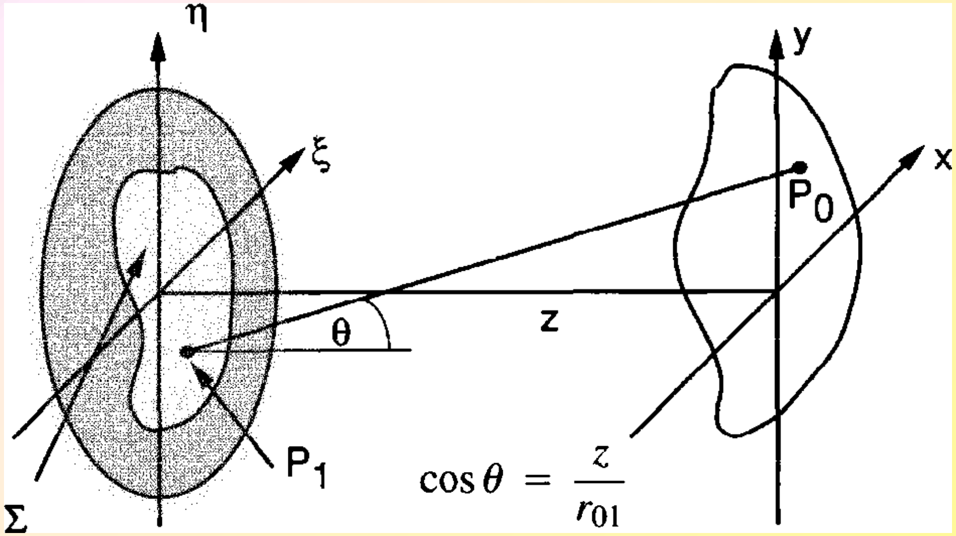
Aproximação de Fresnel

$$U(x, y) = \frac{z}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}^2} \, d\xi \, d\eta,$$

- Aproximação binomial para r_{01}:

$$r_{01} = z\sqrt{1 + \left(\frac{x-\xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y-\eta}{z}\right)^2}.$$

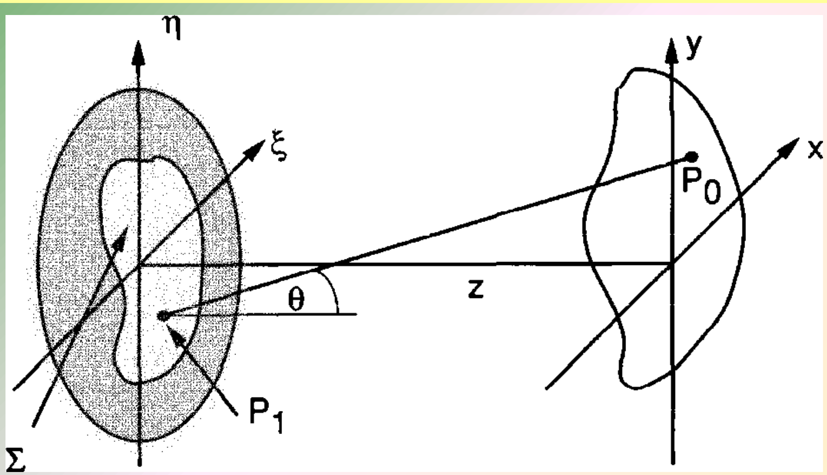
$$r_{01} \approx z\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x-\xi}{z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y-\eta}{z}\right)^2\right]$$



- **Denominador**: $r_{01} \sim z$.
- **Expoente**: termos de 2ª ordem, pois $k=2\pi/\lambda$ é muito grande, em geral:

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp\left\{ j\frac{k}{2z}\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right]\right\} d\xi \, d\eta,$$

Aproximação de Fresnel: validade



- 1º termo desprezado na aproximação binomial:

$$\sqrt{1+b} = 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2 + \cdots$$

$$b = \frac{1}{z^2}\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right]$$

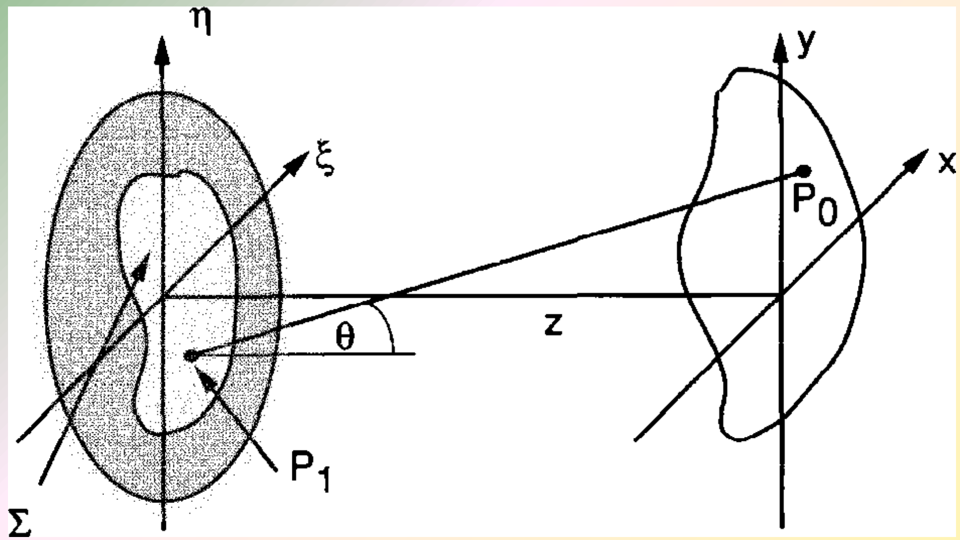
- 1º termo desprezado na **fase**: $kz\dfrac{b^2}{8}$

- O erro na fase deve ser sempre **<< 1rad** (tomando a distância máxima entre os pontos de observação e os ponto da abertura):

$$\boxed{z^3 \gg \frac{\pi}{4\lambda}\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right]^2_{\max}}$$

Aproximação de Fresnel

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp\left\{ j \frac{k}{2z} \left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \right] \right\} d\xi \, d\eta,$$



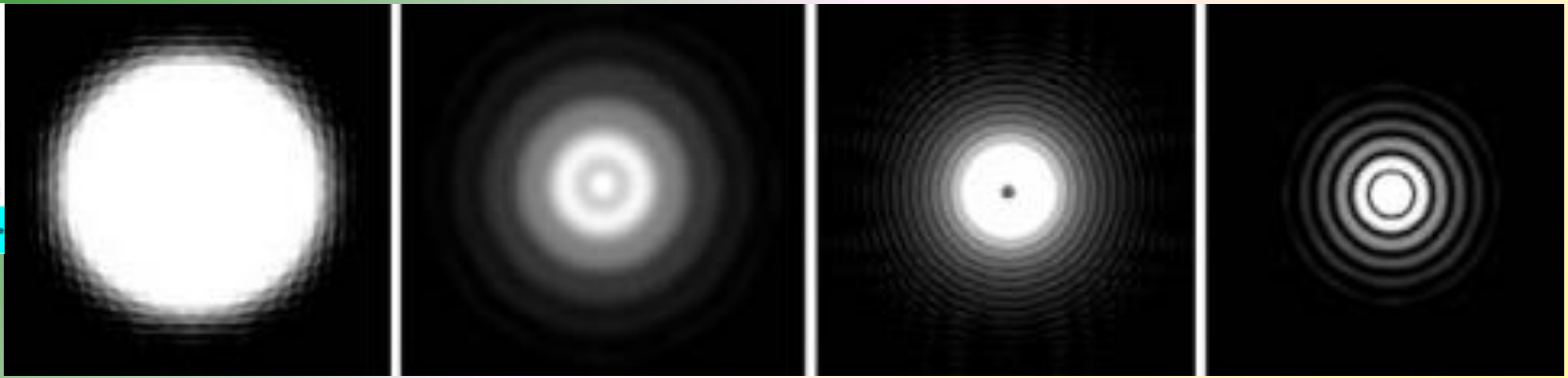
h(x,y) - Ondas esféricas na aproximação paraboloidal

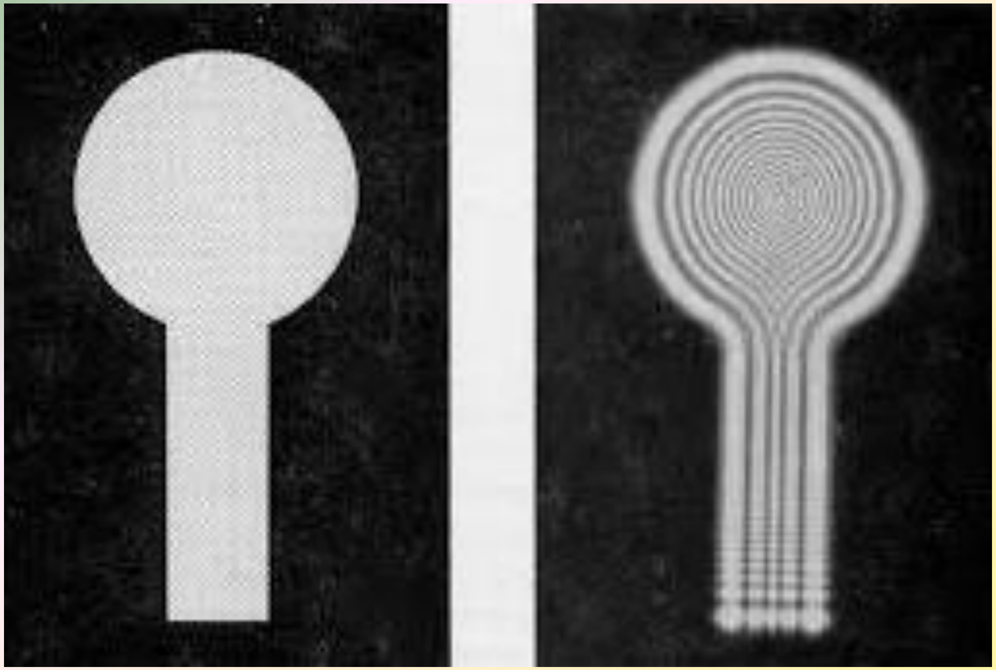
$$U(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \, h(x - \xi, y - \eta) \, d\xi \, d\eta$$

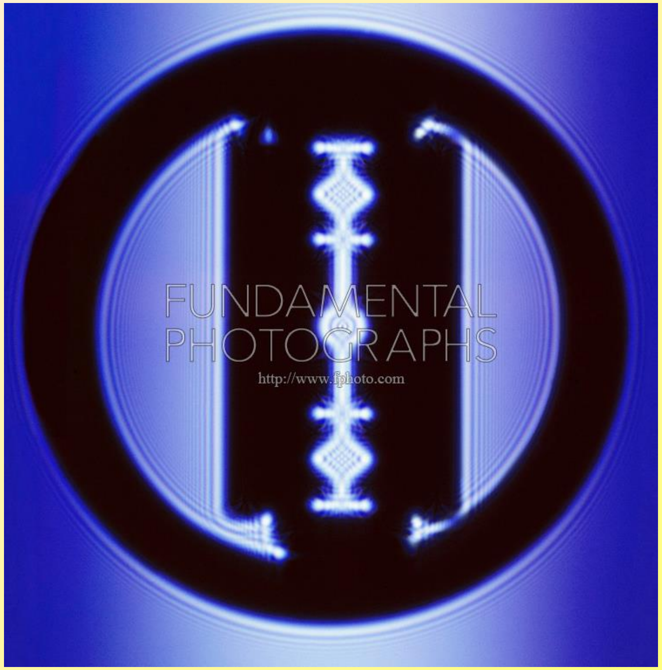
$$h(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \exp\left[\frac{jk}{2z} \left(x^2 + y^2 \right) \right]$$

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j \frac{k}{2z}(x^2 + y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ U(\xi, \eta) e^{j \frac{k}{2z}(\xi^2 + \eta^2)} \right\} e^{-j \frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta)} \, d\xi \, d\eta,$$

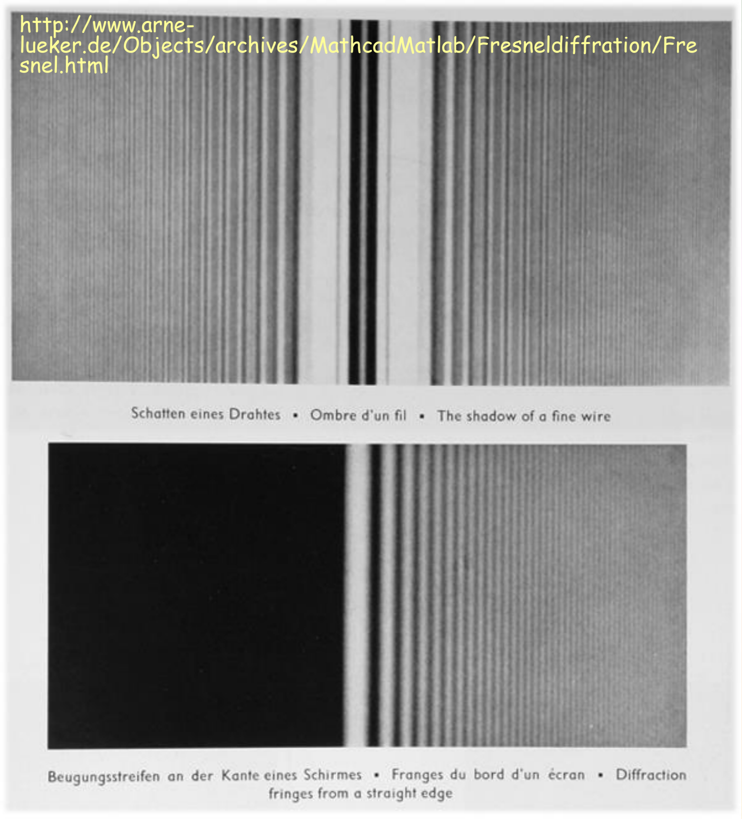
Difracção: Fresnel







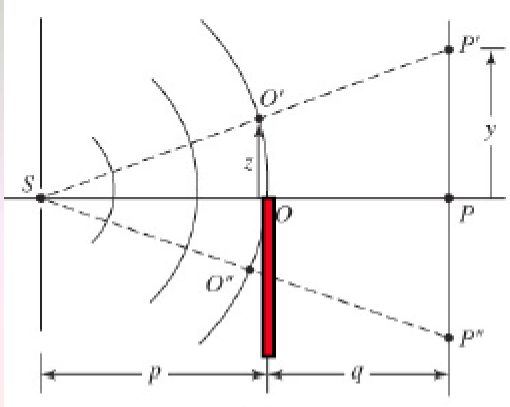
Difracção: Fresnel

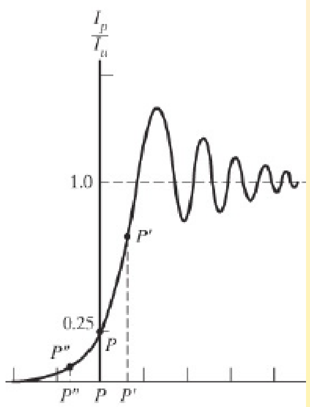


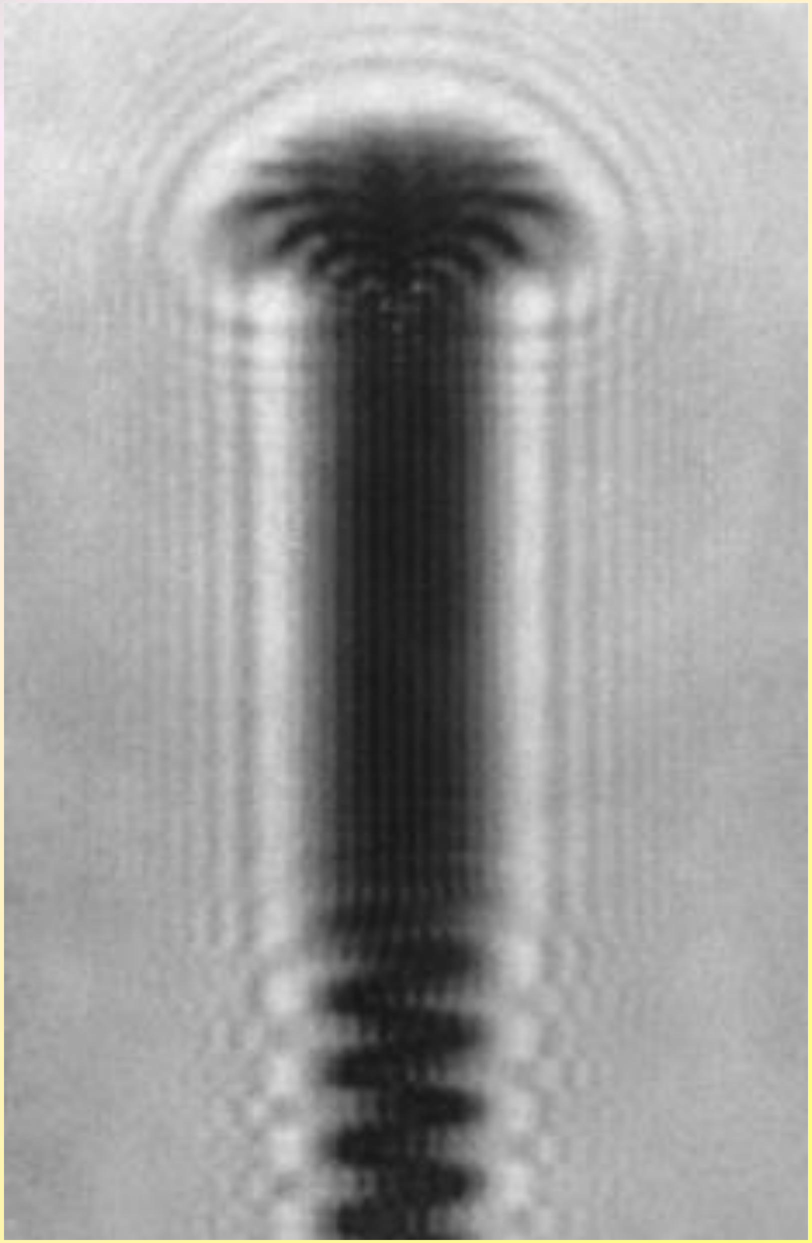
http://www.arne-lueker.de/Objects/archives/MathcadMatlab/Fresneldiffration/Fresnel.html

Schatten eines Drahtes • Ombre d'un fil • The shadow of a fine wire

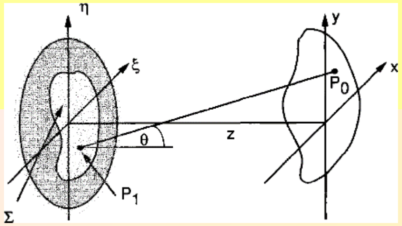
Beugungsstreifen an der Kante eines Schirmes • Franges du bord d'un écran • Diffraction fringes from a straight edge







Aproximação de **Fraunhofer**



Aproximação de Fresnel:

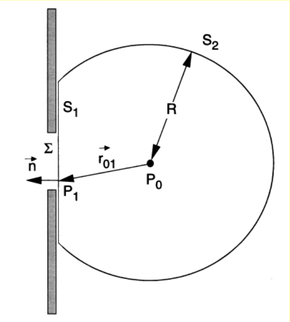
$$U(x,y)=\frac{e^{jkz}}{j\lambda z}e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}\iint_{-\infty}^{\infty}\left\{U(\xi,\eta)e^{j\frac{k}{2z}(\xi^2+\eta^2)}\right\}e^{-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)}\,d\xi\,d\eta,$$

Quando se poderá desprezar o termo quadrático $e^{j\frac{k}{2z}(\xi^2+\eta^2)}$?

Basta que $\boxed{z \gg \frac{k(\xi^2+\eta^2)_{\max}}{2}}$ para que o termo quadrático seja ~1 em **Σ:**

$$\boxed{U(x,y)=\frac{e^{jkz}e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{j\lambda z}\iint_{-\infty}^{\infty}U(\xi,\eta)\exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)\right]d\xi\,d\eta.}$$

A integração é em **todo o plano** 2D, em z=0⁺, mesmo que o objecto difractante seja **finito** – neste caso, U(ξ,η) = 0 fora do objecto…



Aproximação de **Fraunhofer**

$$U(x,y) = \frac{e^{jkz} e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi,\eta) \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta)\right] d\xi\, d\eta.$$

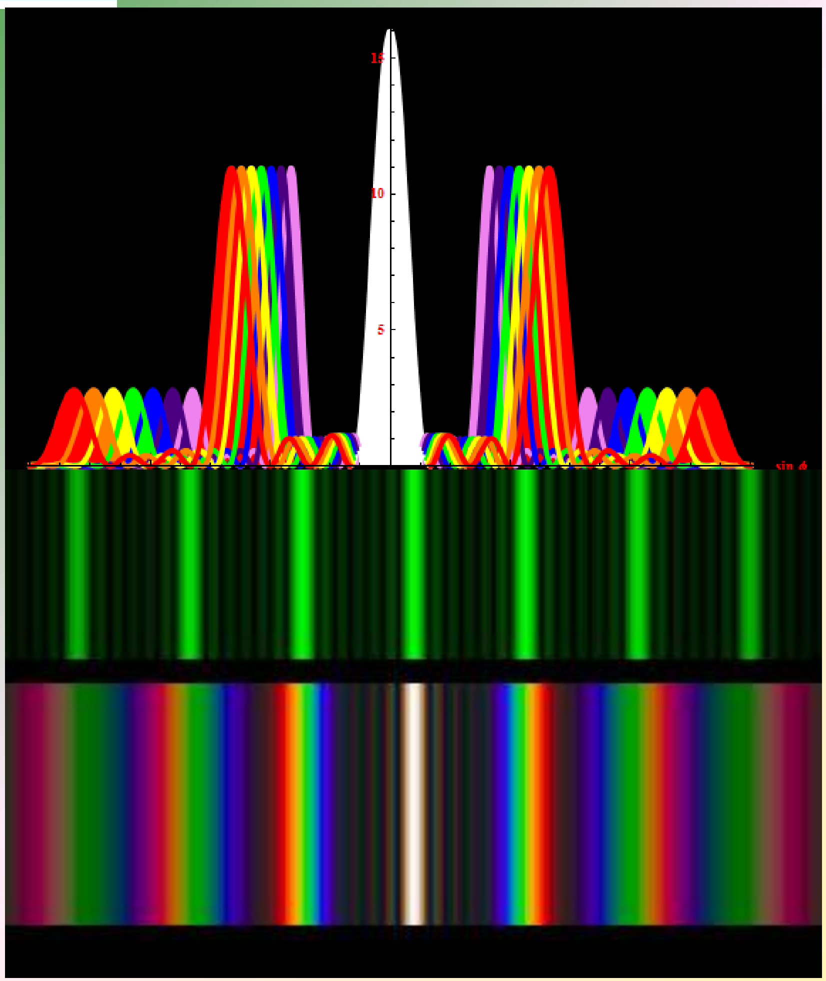
- **A amplitude complexa em (x,y), no plano de observação, é proporcional à Transformada de ******* (TF) do campo para as frequências espaciais:**

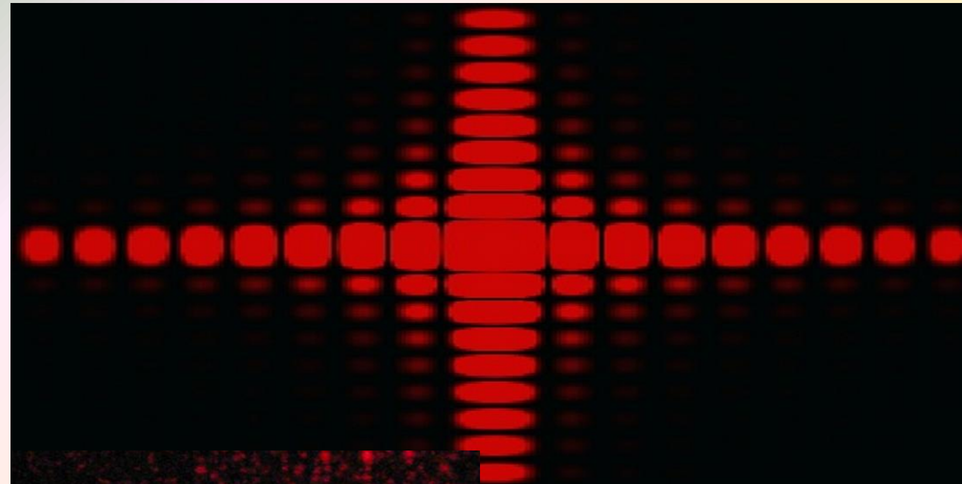
$$f_X = x/\lambda z$$
$$f_Y = y/\lambda z.$$

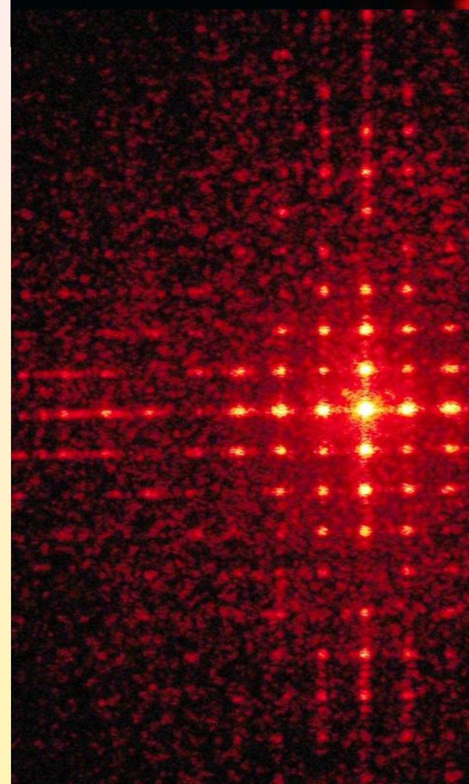
- A aproximação de Fraunhofer pode exigir distâncias consideráveis. Todavia, a aproximação é válida se:
  - A abertura for iluminada por uma onda convergente para o plano que contem P_0;
  - **Em iluminação paralela, for inserida uma lente positiva de distância focal f entre a abertura e o observador. Basta fazer nas equações: z → f**

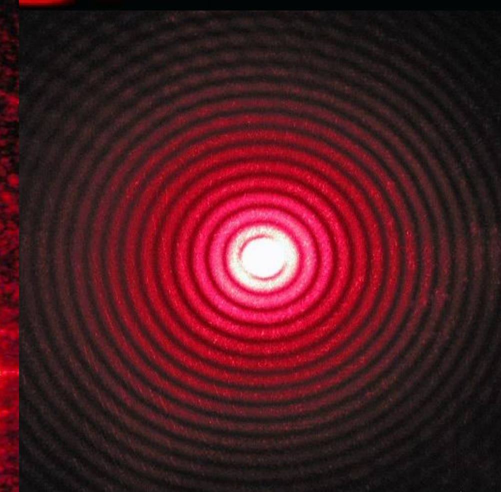
Difracção: Fraunhofer

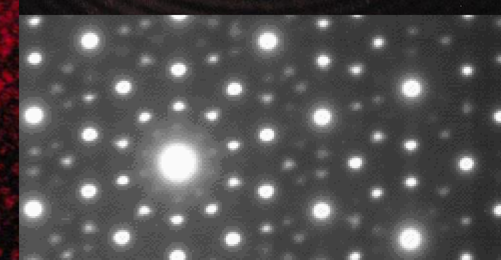
1 Fenda rectangular



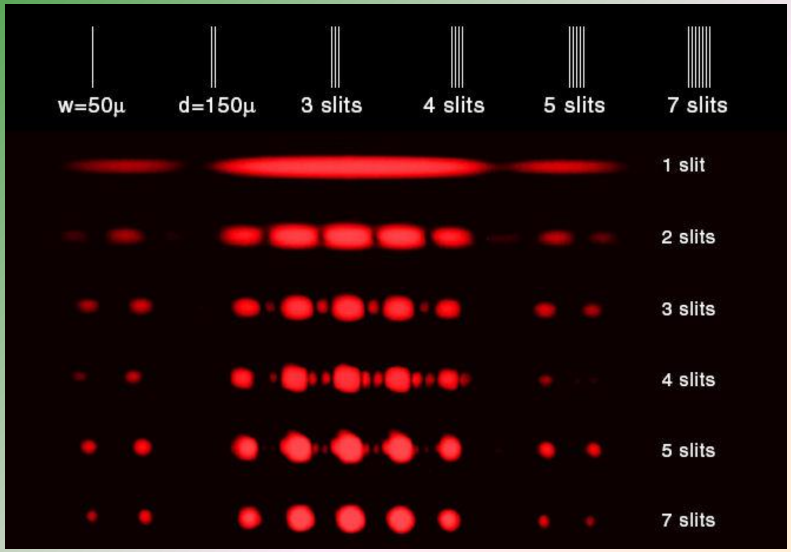


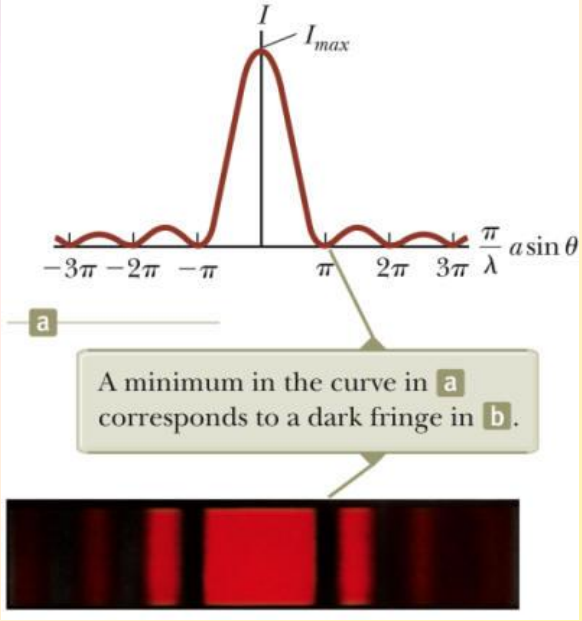


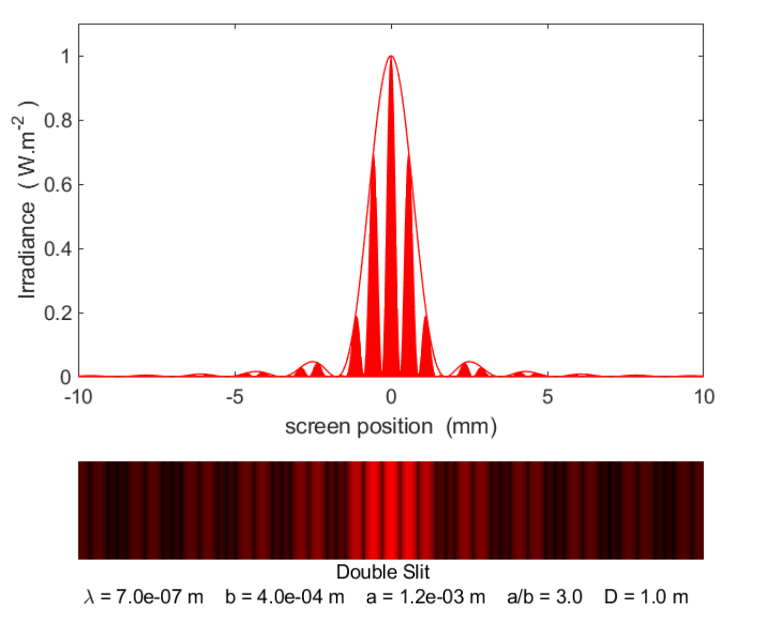


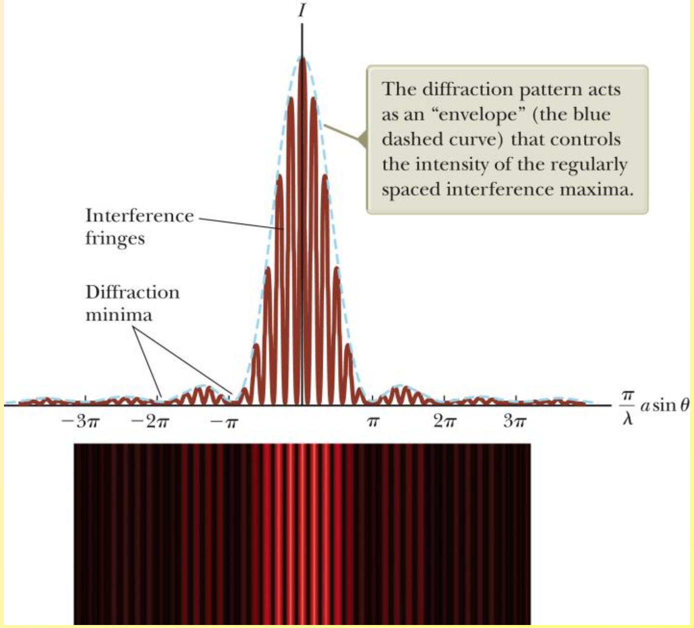


Difracção: Fraunhofer - fendas



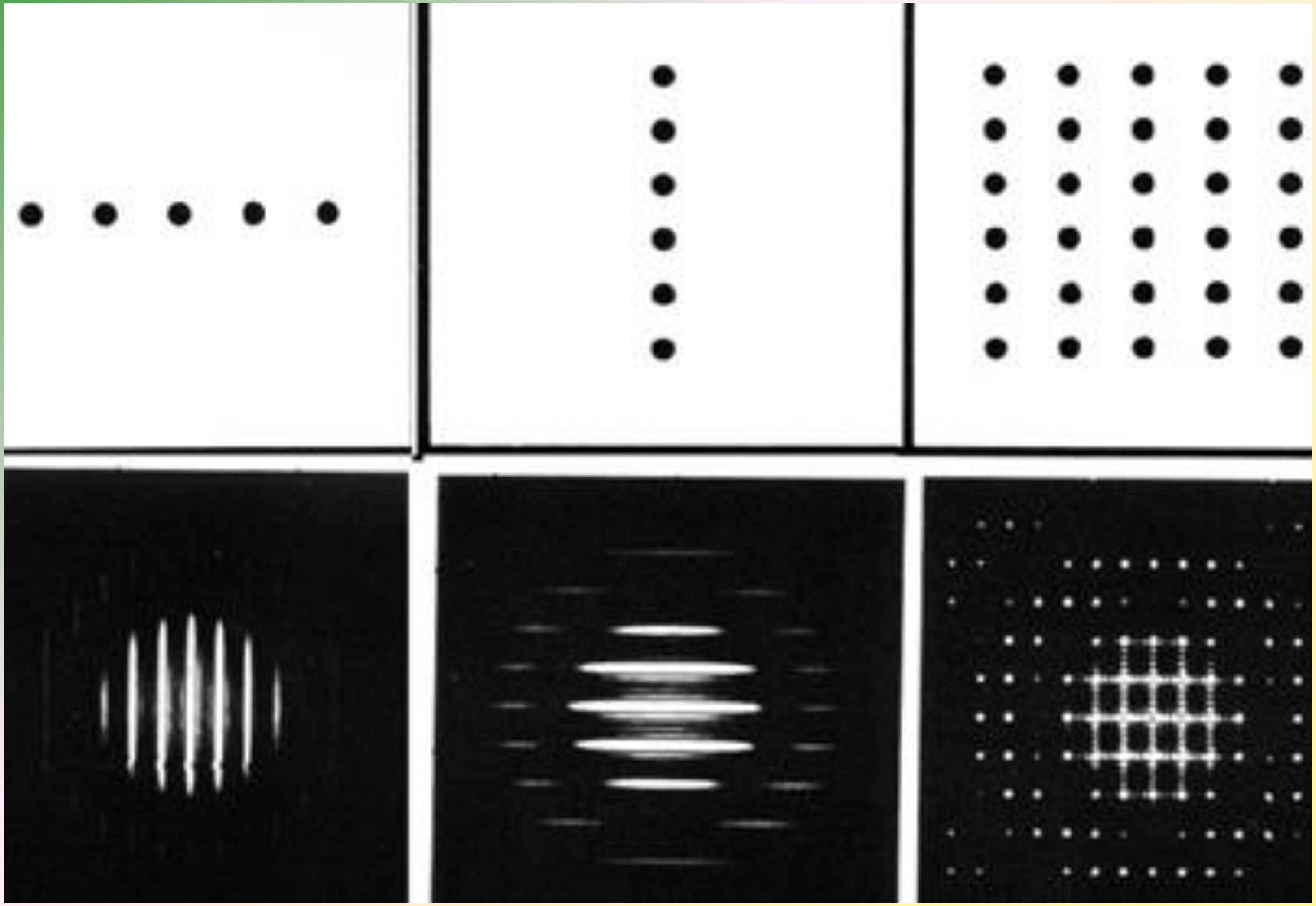






https://www.physics.byu.edu/faculty/colton/courses/phy123-fall12/warmups/jitt34a.html

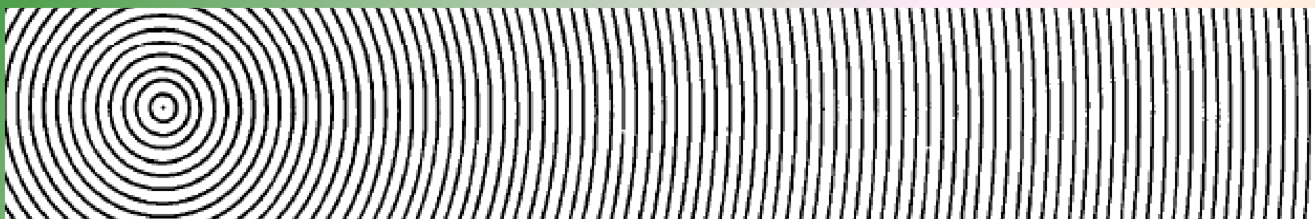
Difracção: Fraunhofer – redes



Difracção: Regimes

CAMPO PRÓXIMO

Integração das equações de Maxwell



CAMPO INTERMÉDIO – APROXIMAÇÃO DE FRESNEL

Ondas esféricas aproximadas por ondas **paraboloidais**

Matemática: transformada de Fresnel

A **forma** do padrão de difracção varia com a distância

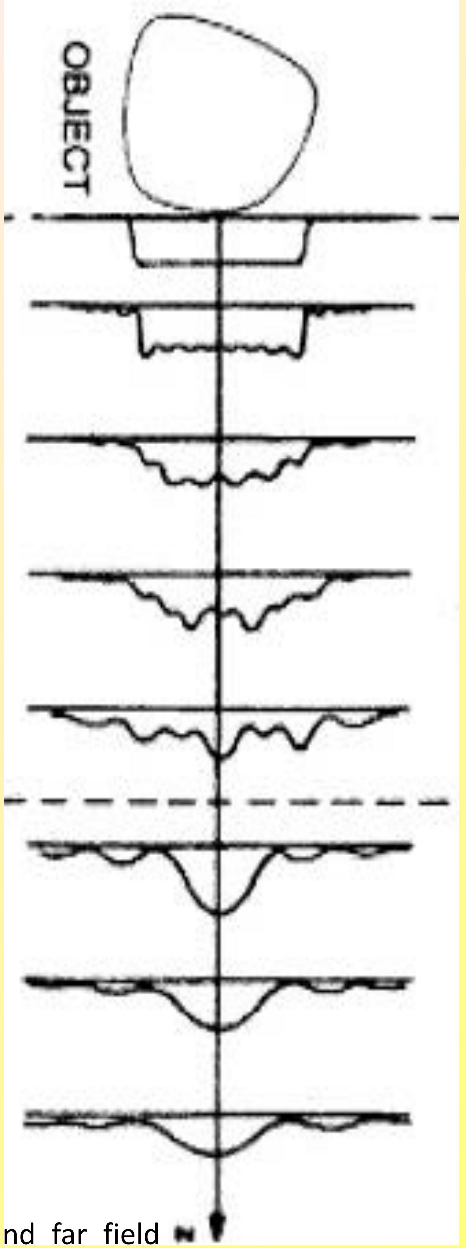
CAMPO LONGÍNQUO – APROXIMAÇÃO DE FRAUNHOFER

Ondas esféricas aproximadas por ondas **planas**

Matemática: transformada de **Fourier**

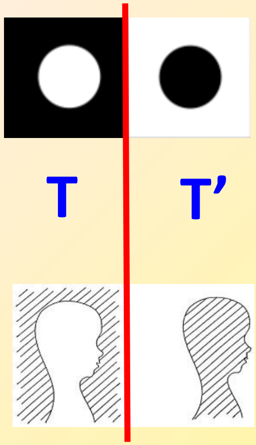
Padrão observável no plano focal imagem de uma lente (*f*)

Forma do padrão **não** varia, e **escala** com **$\lambda z/D$** ou **$\lambda f/D$**

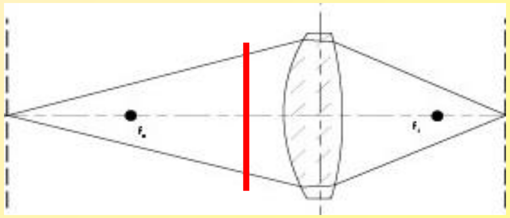


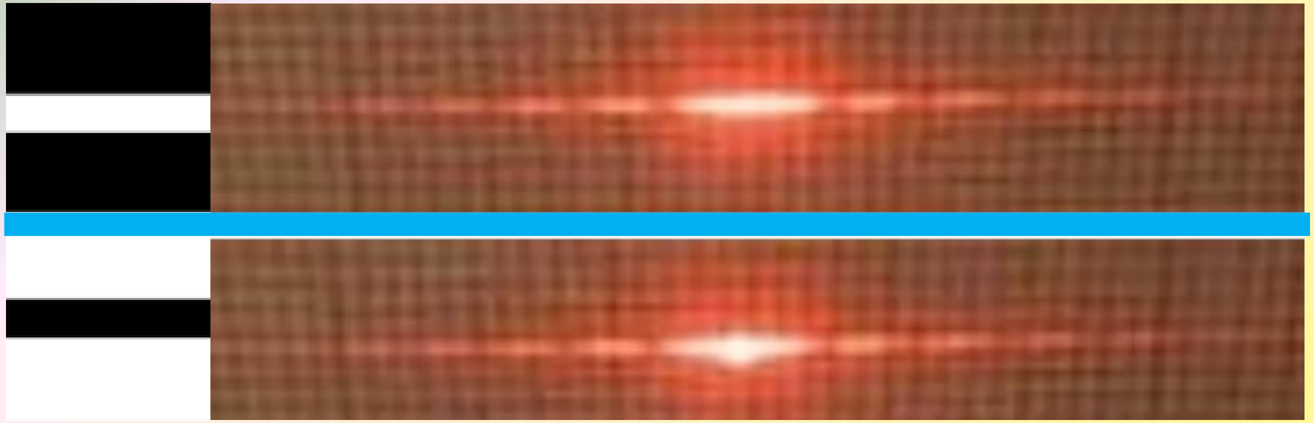
https://en.wikipedia.org/wiki/Near_and_far_field

Difracção: Princípio de Babinet



- O padrão de difracção de um objecto opaco, T, e do seu complementar, T’, são identicos.
- A soma dos dois campos difractados por T+T’, deve ser igual ao campo associado ao feixe não perturbado por nenhum deles.
- Em pontos do campo iluminante em que $E_{total} = 0$, os campos devidos a T e a T’ devem ser simétricos, pois $E_{total} = E_T + E_{T'} = 0$.
- Nesses casos, $E_T = - E_{T'}$ e as irradiâncias são iguais: $I_T = I_{T'}$. Os padrões de difracção são identicos!
- Como implementar $E_{total} = 0$? Para objectos inseridos algures no sistema óptico se a observação dos padrões de difracção for feita fora da imagem da fonte pontual, a condição anterior é cumprida.





Propriedades da Transformada de Fourier

Definições:

$$\mathcal{F}\{g\} = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp[-j2\pi(f_X x + f_Y y)]\, dx\, dy$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{G\} = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_X, f_Y) \exp[j2\pi(f_X x + f_Y y)]\, df_X\, df_Y$$

Dupla transformação:

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\{g(x, y)\} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{g(x, y)\} = g(x, y)$$

Linearidade:

$$\mathcal{F}\{\alpha g + \beta h\} = \alpha \mathcal{F}\{g\} + \beta \mathcal{F}\{h\}$$

Translação:

$$\mathcal{F}\{g(x - a, y - b)\} = G(f_X, f_Y) \exp[-j2\pi(f_X a + f_Y b)]$$

Escala:

$$\mathcal{F}\{g(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|} G\left(\frac{f_X}{a}, \frac{f_Y}{b}\right)$$

Energia / T. Parseval

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)|^2\, dx\, dy = \iint_{-\infty}^{\infty} |G(f_X, f_Y)|^2\, df_X\, df_Y$$

Propriedades da Transformada de Fourier

Convolução: $f(x,y) = g ** h = \iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta)\, h(x-\xi, y-\eta)\, d\xi\, d\eta$

TF da convolução:

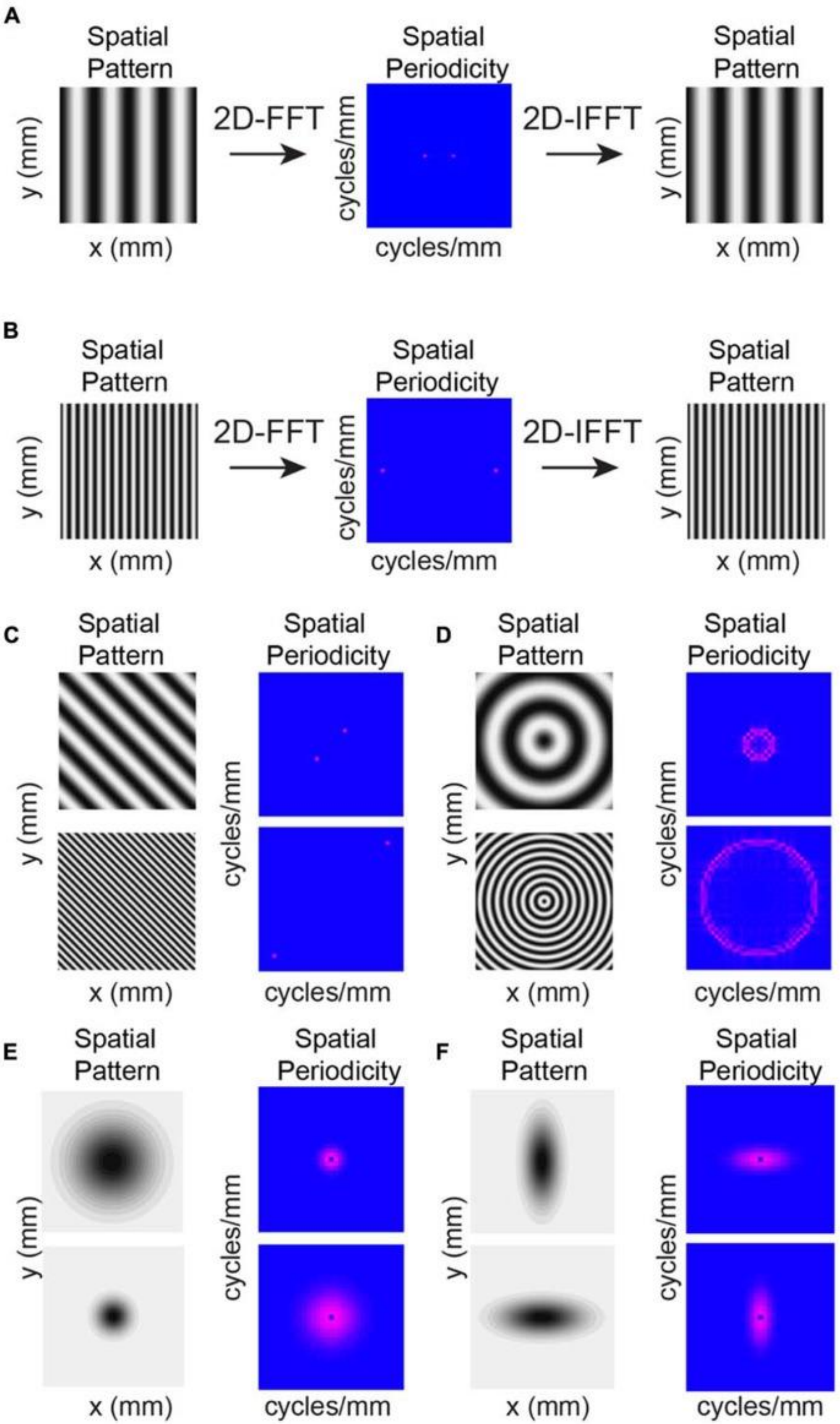
$$F(f_x,f_y) = \mathcal{F}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta)\, h(x-\xi, y-\eta)\, d\xi\, d\eta\right\} = G(f_X, f_Y)\,H(f_X, f_Y)$$

TF de um produto: $\mathcal{F}\{f(x,y)\} = \mathcal{F}\{g \times h\} = G(f_x,f_y) ** H(f_x,f_y)$

Elemento neutro da convolução: $\delta(\xi,\eta)$

$$\delta ** g = g ** \delta = g$$

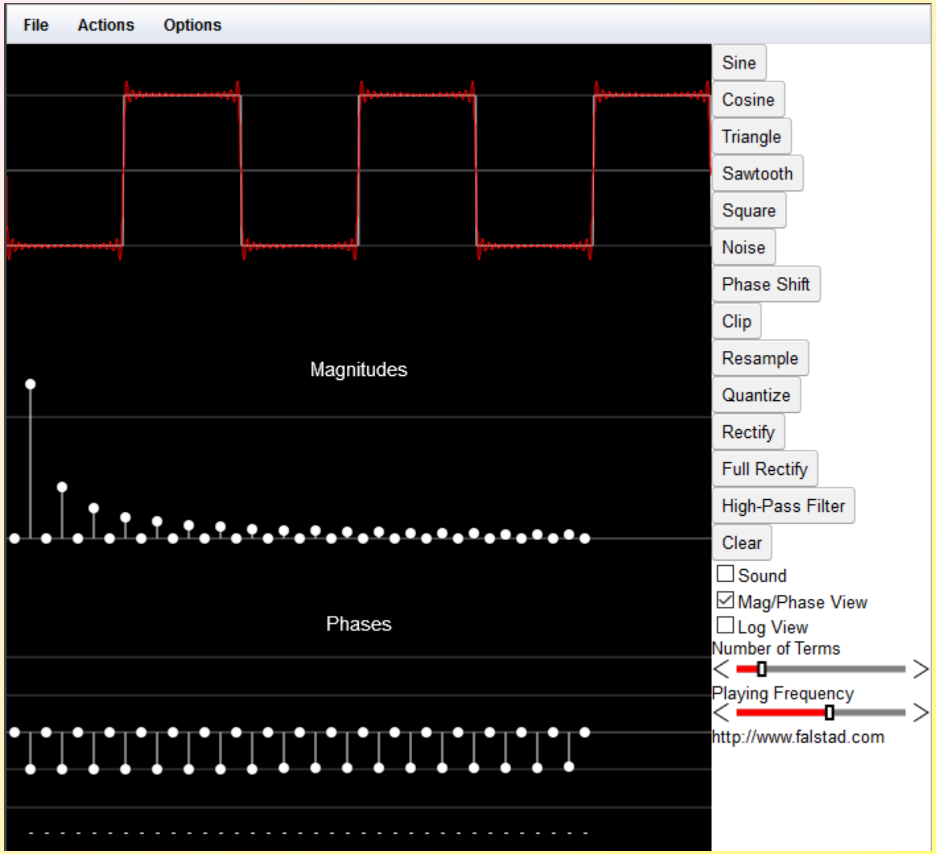
Análise e Síntese de Fourier



https://www.researchgate.net/figure/Example-2D-Fourier-Analysis-FFT-images-demonstrate-conversion-from-space-to-spatial_fig5_260999966

Significado físico da TF 2D

http://fourier.eng.hmc.edu/e161/lectures/fourier/node10.html

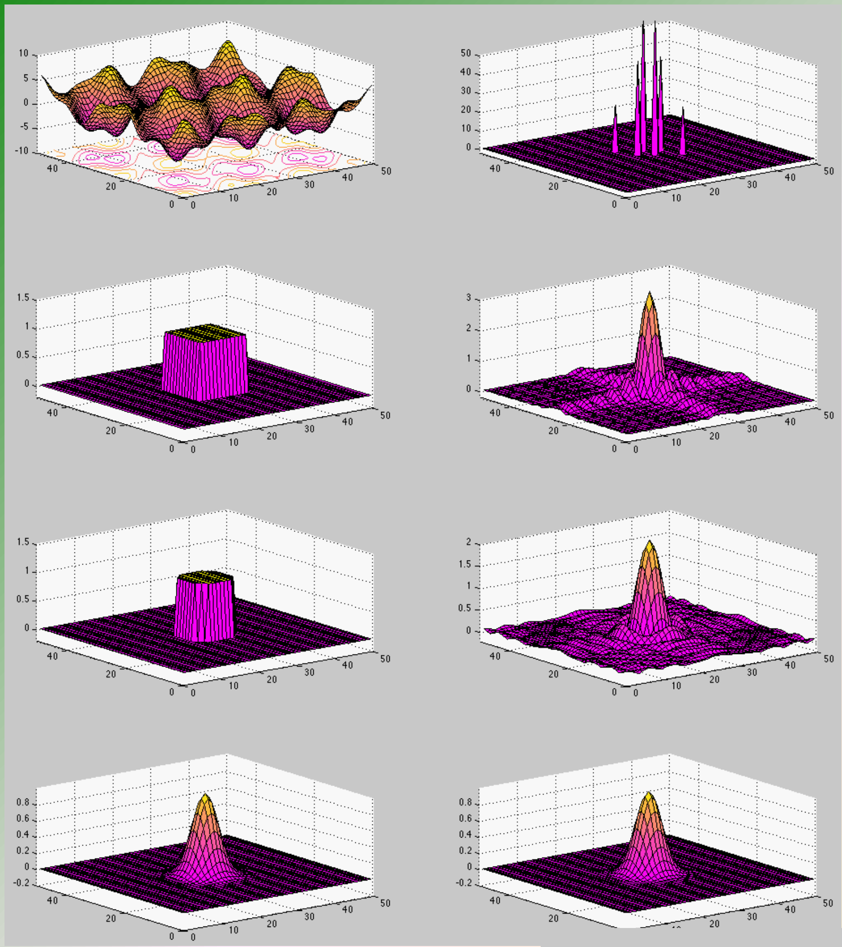


Análise e síntese de Fourier (1D)

http://www.falstad.com/fourier/

Significado físico da TF 2-D

http://fourier.eng.hmc.edu/e161/lectures/fourier/node10.html



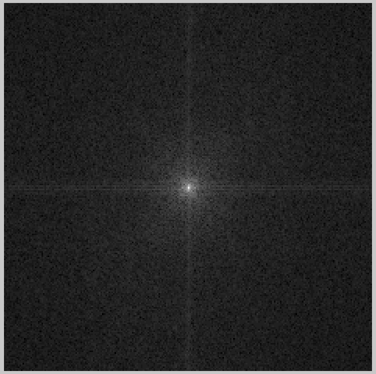
$$f(x,y) = \int\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{j2\pi(xu+yv)}\, du\, dv$$

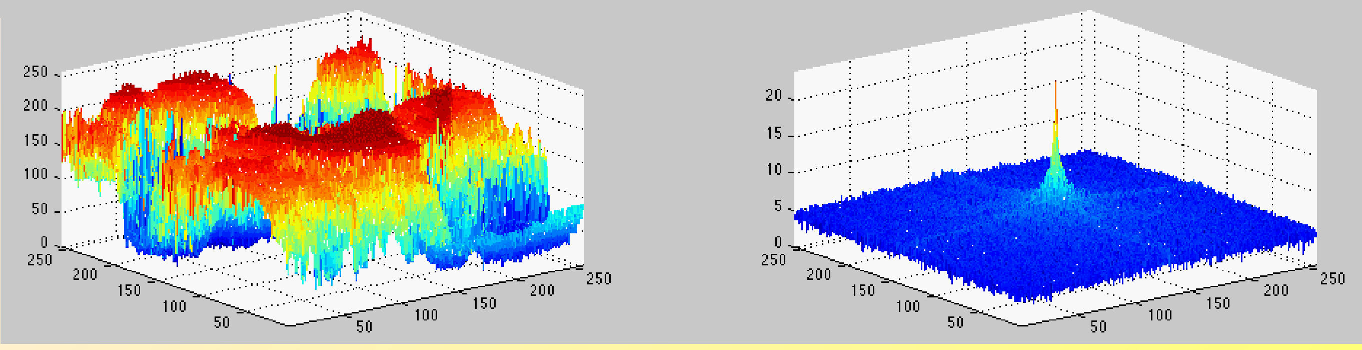
$$|F(u,v)| = \sqrt{F_r(u,v)^2 + F_j(u,v)}$$

$$\angle F(u,v) = tan^{-1}(F_j(u,v)/F_r(u,v))$$

$$w = \sqrt{u^2 + v^2}$$

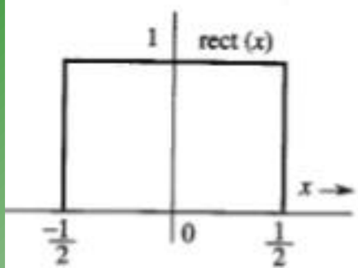
$$\theta = tan^{-1}(v/u)$$

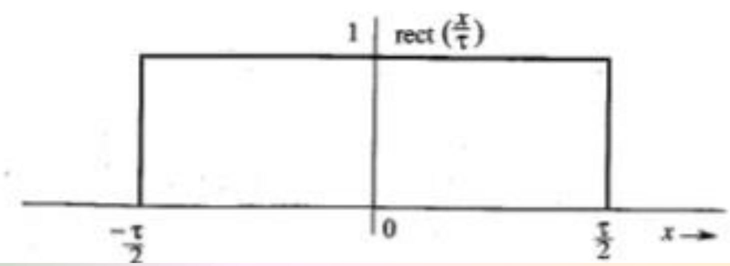


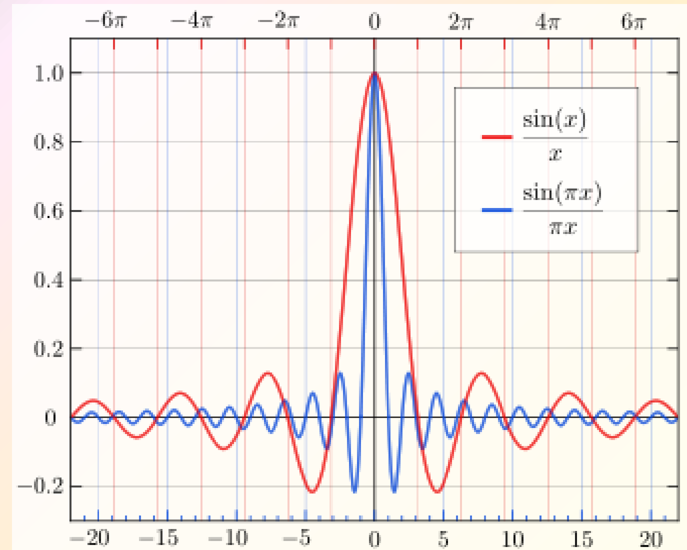


Funções úteis da óptica: rectângulo, sinc

$$\Pi\left(\frac{x}{\tau}\right) = rect\left(\frac{x}{\tau}\right) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & |x| > \frac{\tau}{2} \\ \frac{1}{2}, & |x| = \frac{\tau}{2} \\ 1, & |x| < \frac{\tau}{2} \end{array} \right\}$$





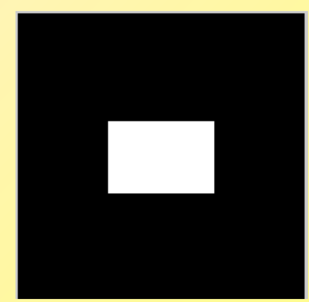


A TF do rect(x) é a função Seno Cardinal, sinc:

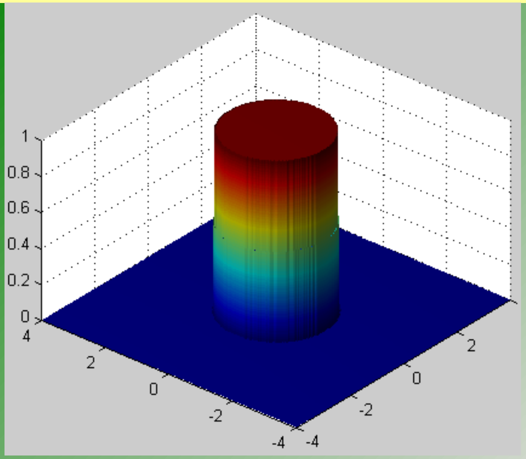
$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

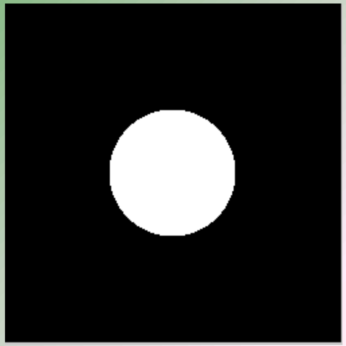
Um rectângulo 2D é um produto de *rect* 1D:

$$\mathrm{rect}(ax)\,\mathrm{rect}(by) \qquad \frac{1}{|ab|}\,\mathrm{sinc}(f_X/a)\,\mathrm{sinc}(f_Y/b)$$

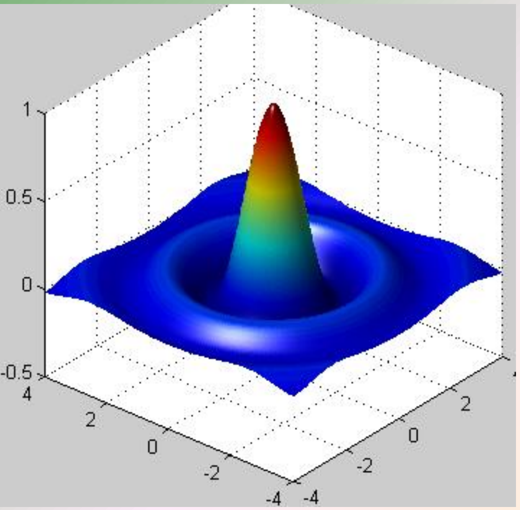


Funções úteis da óptica: cilindro *(circ), somb*





$$\operatorname{circ}(r) = \begin{cases} 1 & r < 1 \\ \frac{1}{2} & r = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



A Transformada de Fourier em coordenadas esféricas (ρ,ϕ), para funções simétricas, é conhecida como transformada de Fourier-Bessel. Para a função *circ*:

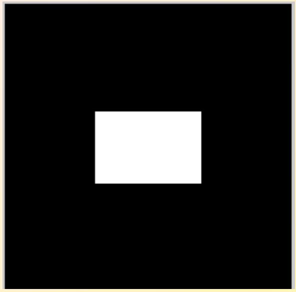
$$\mathcal{B}\{\operatorname{circ}(r)\} = \frac{1}{2\pi\rho^2}\int_0^{2\pi\rho} r' J_0(r')\, dr' = \frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho}$$

A TF de um circ tem a forma de um chapéu mexicano (Sombrero, *somb*)

Difracção de Fraunhofer: abertura rectangular

- Abertura, no plano z = 0:

$$t_A(\xi,\eta) = \mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{2w_X}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\eta}{2w_Y}\right)$$



$$A = 4w_X w_Y$$

- Iluminação: onda plana ao longo de Oz: $U_i(\xi,\eta) = 1$.
- Imediatamente **depois** da abertura: $U(\xi,\eta) = 1 \,.\, t_A(\xi,\eta)$
- Campo no infinito:

$$U(x,y) = \frac{e^{jkz}e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{j\lambda z}\mathcal{F}\{U(\xi,\eta)\}\Big|_{\substack{f_X = x/\lambda z \\ f_Y = y/\lambda z}}.$$

- TF:

$$\mathcal{F}\{U(\xi,\eta)\} = A\,\mathrm{sinc}(2w_X f_X)\,\mathrm{sinc}(2w_Y f_Y)$$

- Campo no infinito:

$$U(x,y) = \frac{e^{jkz}e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{j\lambda z}A\,\mathrm{sinc}\left(\frac{2w_X x}{\lambda z}\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{2w_Y y}{\lambda z}\right),$$

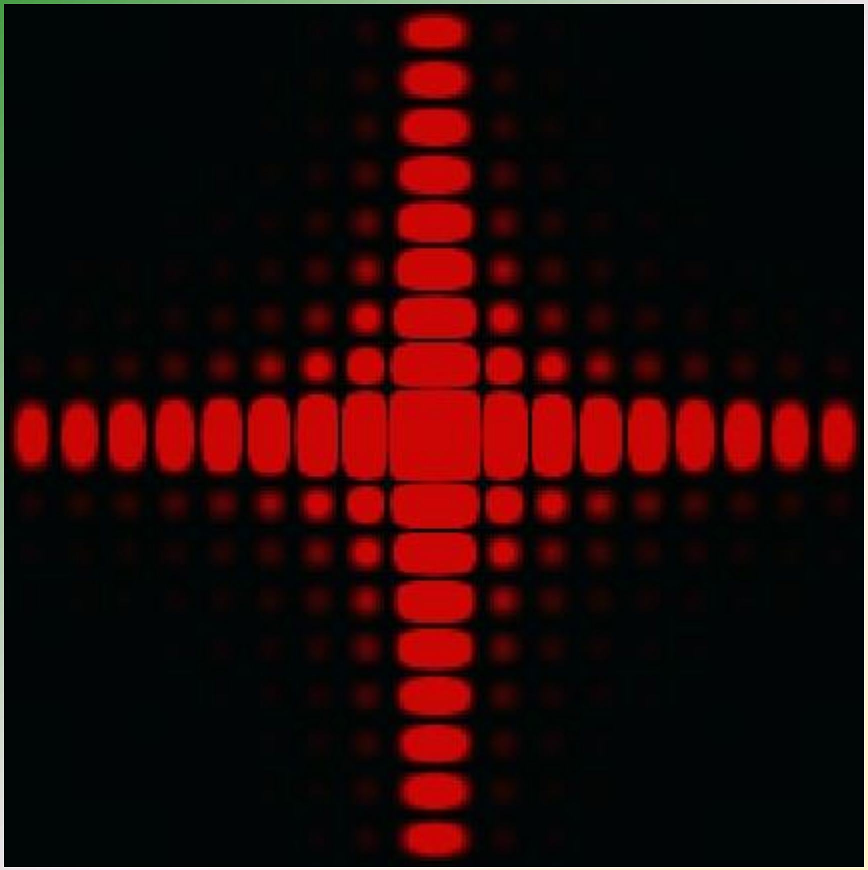
- Irradiância no infinito:

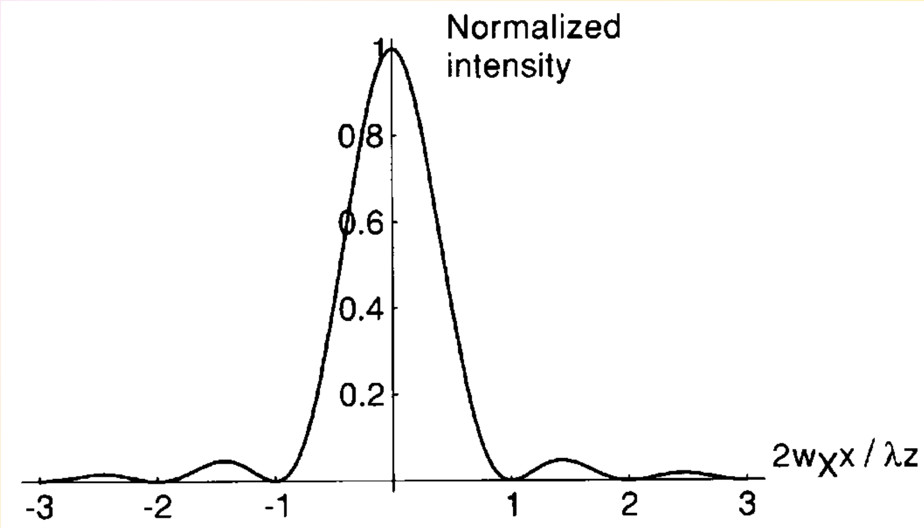
$$I(x,y) = \frac{A^2}{\lambda^2 z^2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{2w_X x}{\lambda z}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{2w_Y y}{\lambda z}\right).$$

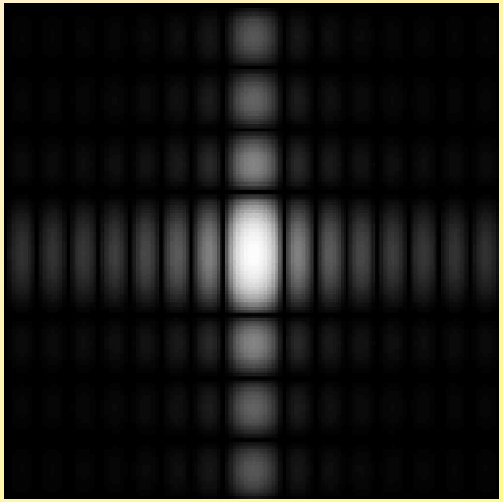
Difracção de Fraunhofer: abertura rectangular

$$t_A(\xi,\eta) = \mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{2w_X}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\eta}{2w_Y}\right)$$

$$I(x,y) = \frac{A^2}{\lambda^2 z^2}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{2w_X x}{\lambda z}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{2w_Y y}{\lambda z}\right)$$





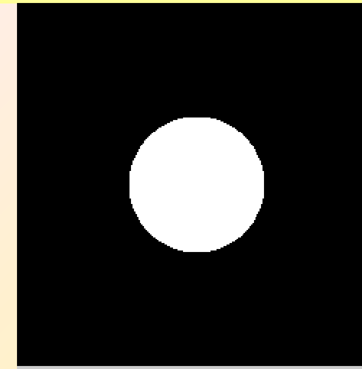


Difracção de Fraunhofer: abertura circular

- Abertura de raio *w* (simetria radial):

$$t_A(q) = \mathrm{circ}\left(\frac{q}{w}\right)$$

$$q = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$



$$A = \pi w^2$$

- Iluminação por onda plana: $U_i(\xi,\eta) = 1$.

- Campo no infinito:

$$U(r) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \exp\left(j\frac{kr^2}{2z}\right) \mathcal{B}\{U(q)\}\Big|_{\rho = r/\lambda z}$$

- Raio no plano de Fourier:

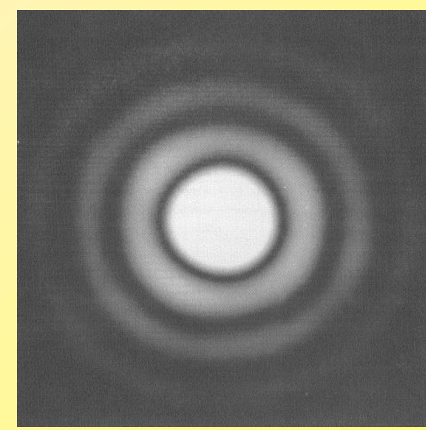
$$\rho = \sqrt{f_X^2 + f_Y^2}$$

- Campo no infinito:

$$\boxed{U(r) = e^{jkz} e^{j\frac{kr^2}{2z}} \frac{A}{j\lambda z}\left[2\frac{J_1(kwr/z)}{kwr/z}\right]}$$

- Irradiância no infinito:

$$\boxed{I(r) = \left(\frac{A}{\lambda z}\right)^2 \left[2\frac{J_1(kwr/z)}{kwr/z}\right]^2}$$

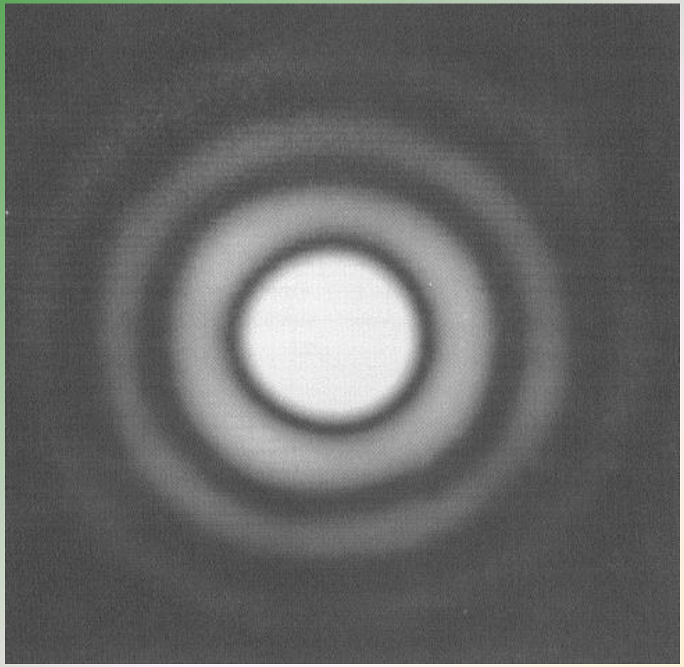


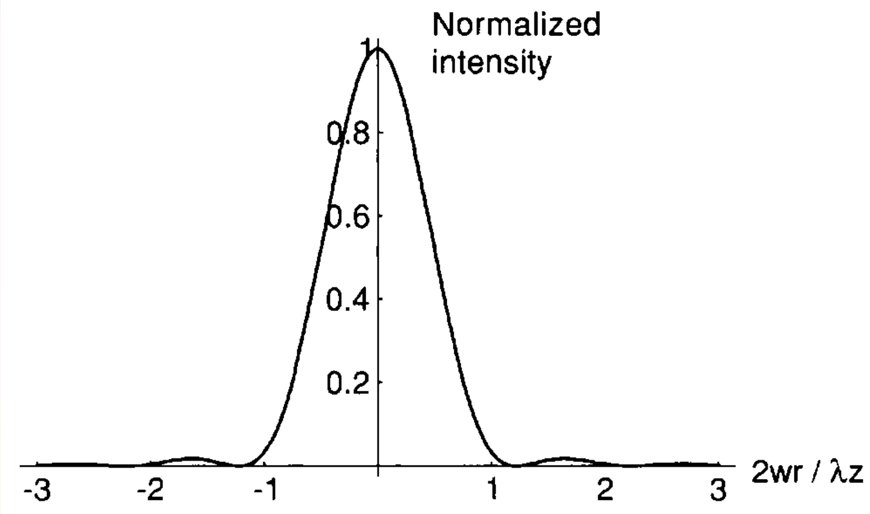
Difracção de Fraunhofer: abertura circular

$$t_A(q) = \mathrm{circ}\left(\frac{q}{w}\right).$$

$$A = \pi w^2$$

$$I(r) = \left(\frac{A}{\lambda z}\right)^2 \left[2\frac{J_1(kwr/z)}{kwr/z}\right]^2$$



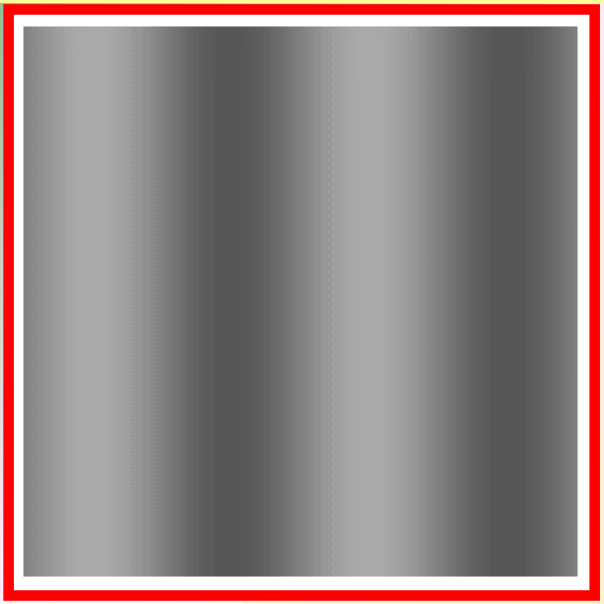


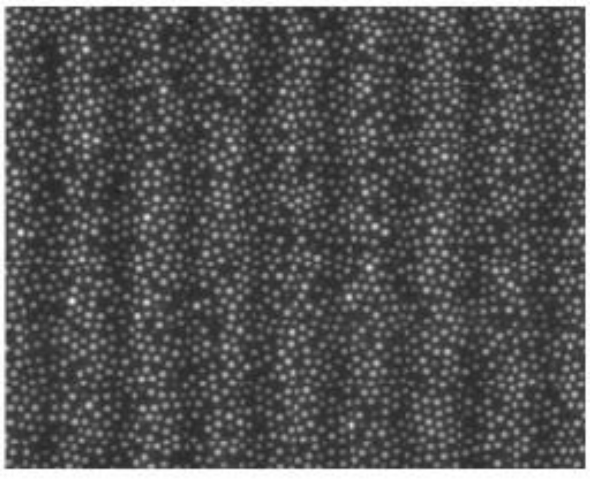
- **Diâmetro** do lobo central:

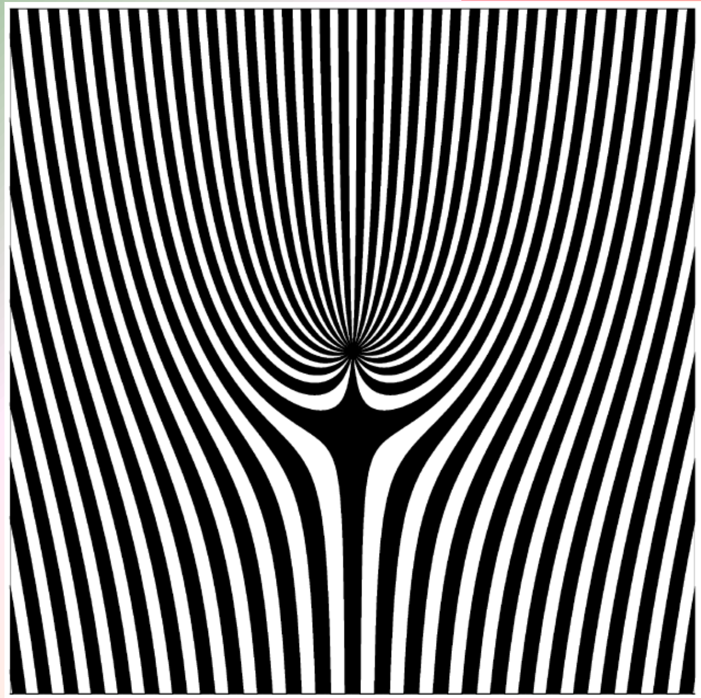
$$\boxed{d = 1.22\frac{\lambda z}{w}}$$

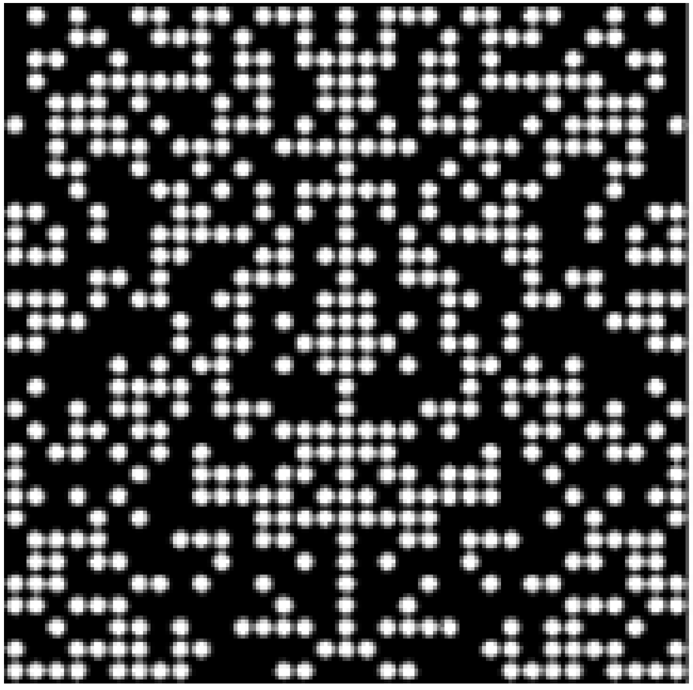
x	$\left[2\frac{J_1(\pi x)}{\pi x}\right]^2$	max, min
0	1	max
1.220	0	min
1.635	0.0175	max
2.233	0	min
2.679	0.0042	max
3.238	0	min
3.699	0.0016	max

Redes de difracção de amplitude







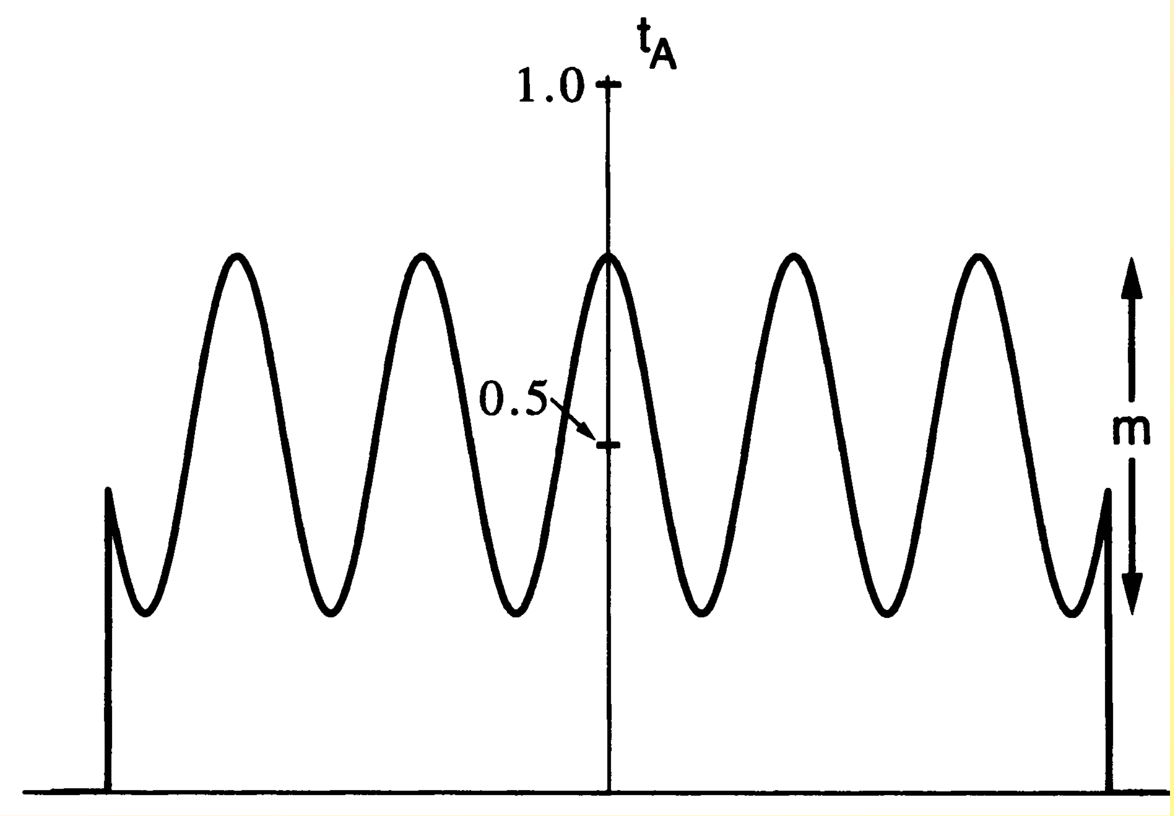


Redes de difracção de amplitude

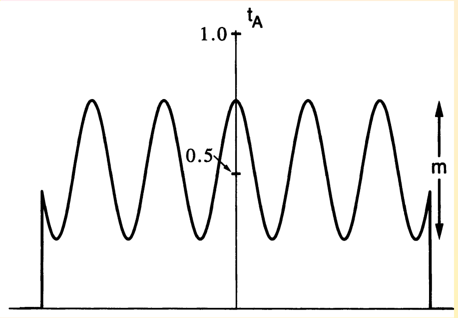
- Rede periódica linear, segundo o eixo ξ, 2D, de frequência espacial f_0, modulação m, inscrita num quadrado de semi-largura w.

- Função de transmissão em amplitude:

$$t_A(\xi,\eta) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos(2\pi f_0 \xi)\right] \mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{2w}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{\eta}{2w}\right)$$



Redes de difracção de amplitude



Rede de difracção 1D $\quad t(\xi) = (1 + \cos f_0 \xi)\, \mathrm{rect}(\xi)$

Transformada de Fourier

$$T(f_X) = \left[\delta(f_X) + \frac{1}{2}\delta(f_X - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f_X + f_0)\right] \circledast \mathrm{sinc}(f_X)$$

$$T(f_X) = \mathrm{sinc}(f_X) + \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(f_X - f_0) + \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(f_X + f_0)$$

$$\cos(2\pi f_0 x) = \frac{e^{+i2\pi f_0 x} + e^{-i2\pi f_0 x}}{2}$$

$$\frac{1}{2}[\delta(f_X - f_0) + \delta(f_X + f_0)]$$

$$g \star\star\, \delta = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, \delta(\xi - x, \eta - y)\, dx dy$$

$$= g(\xi, \eta)$$

Usa-se um valor preciso da frequência espacial

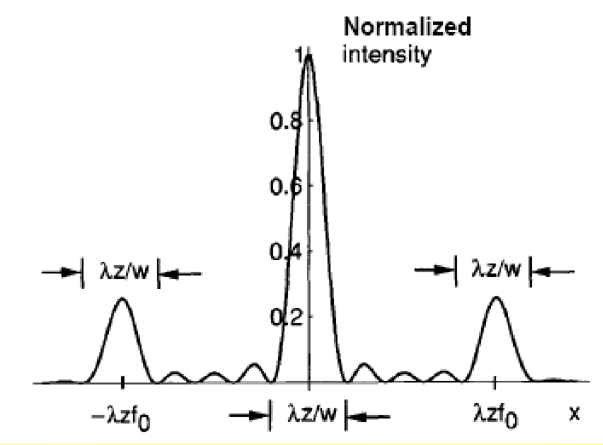
$f_X = \dfrac{x}{\lambda z} \rightarrow x \qquad$ (se λz = 1)

Amplitude complexa

$$U(x) = \frac{A}{i\lambda z}\left[\mathrm{sinc}(x) + \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(x - f_0) + \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(x + f_0)\right]$$

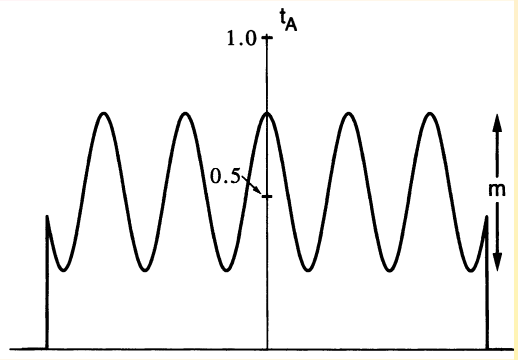
Irradiância, E=|U|^2 - sem sobreposição dos sinc's

$$I(x) = \left(\frac{A}{\lambda z}\right)^2 \left[\mathrm{sinc}^2(x) + \frac{1}{4}\mathrm{sinc}^2(x - f_0) + \frac{1}{4}\mathrm{sinc}^2(x + f_0)\right]$$



Redes de difracção de amplitude

$$t_A(\xi,\eta) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos(2\pi f_0 \xi)\right] \text{rect}\left(\frac{\xi}{2w}\right) \text{rect}\left(\frac{\eta}{2w}\right)$$



- Iluminação por onda plana (em $z=0^-$): $U_i(\xi,\eta) = 1$.
- Campo no plano da rede (ξ,η), logo depois da rede (em $z=0^+$): $U(\xi,\eta,0) = t_A(\xi,\eta)$
- Teorema da Convolução: $$\mathcal{F}\{gh\} = G(f_X,f_Y) \star\star H(f_X,f_Y)$$
- Transformadas de Fourier dos dois factores:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos(2\pi f_0\xi)\right\} = \frac{1}{2}\delta(f_X, f_Y) + \frac{m}{4}\delta(f_X + f_0, f_Y) + \frac{m}{4}\delta(f_X - f_0, f_Y)$$

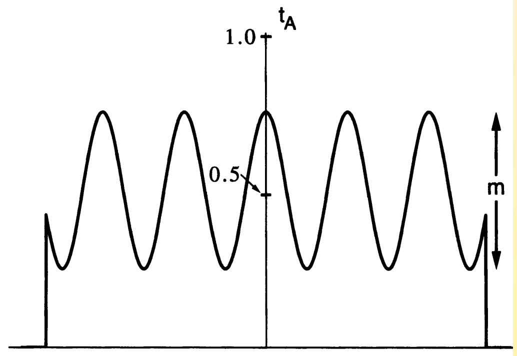
$$\mathcal{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{\xi}{2w}\right) \text{rect}\left(\frac{\eta}{2w}\right)\right\} = A\ \text{sinc}(2wf_X)\ \text{sinc}(2wf_Y)$$

- O δ-Dirac é o **elemento neutro** da convolução:

$$g \star\star\, \delta = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\,\delta(x-\xi, y-\eta)\,dxdy = g(\xi,\eta)$$

Redes de difracção de amplitude

$$t_A(\xi,\eta) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos(2\pi f_0 \xi)\right] \mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{2w}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{\eta}{2w}\right)$$



- Como o δ-Dirac é o elemento neutro da convolução, o campo no infinito é:

$$U(x,y) = \frac{A}{j2\lambda z} e^{jkz} e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \mathrm{sinc}\left(\frac{2wy}{\lambda z}\right) \left\{ \mathrm{sinc}\left(\frac{2wx}{\lambda z}\right) + \frac{m}{2}\mathrm{sinc}\left[\frac{2w}{\lambda z}(x + f_0\lambda z)\right] + \frac{m}{2}\mathrm{sinc}\left[\frac{2w}{\lambda z}(x - f_0\lambda z)\right] \right\}$$

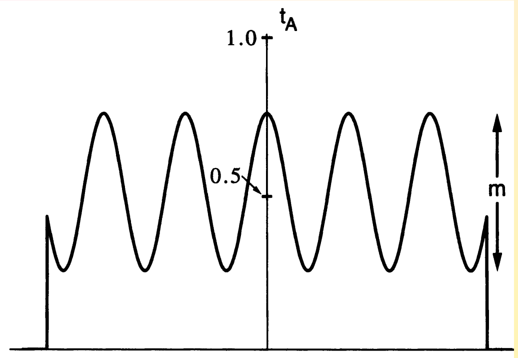
- Para se calcular a Irradiância no infinito, $I(x,y) \sim |U(x,y)|^2$. Se:

$f_0 >> 1/w$ *(muitos ciclos de variação no interior da abertura)*

os três sinc's não se sobrepõem. Os produtos cruzados serão desprezáveis…

Redes de difracção de amplitude

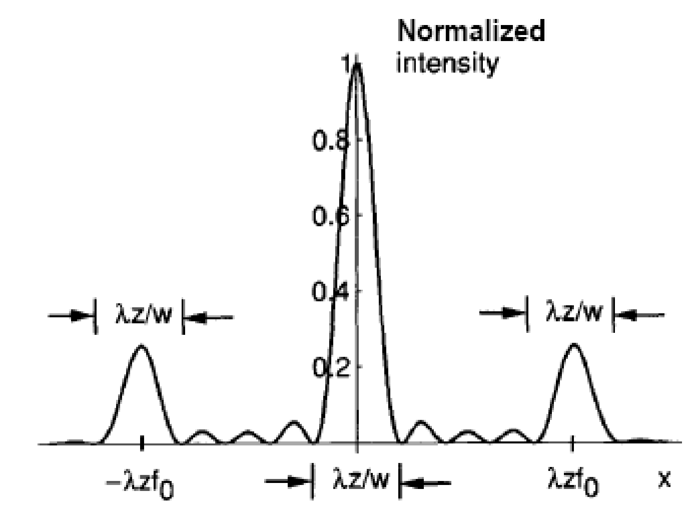
$$t_A(\xi,\eta) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos(2\pi f_0 \xi)\right] \operatorname{rect}\left(\frac{\xi}{2w}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{\eta}{2w}\right)$$



- A Irradiância no infinito é:

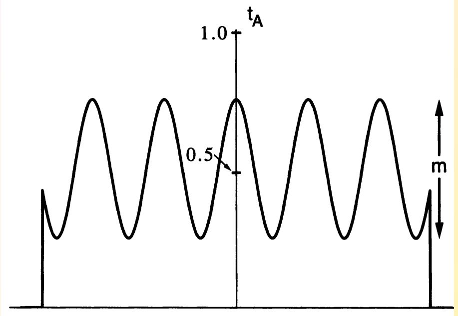
$$I(x,y) \approx \left[\frac{A}{2\lambda z}\right]^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{2wy}{\lambda z}\right)\left\{\operatorname{sinc}^2\left(\frac{2wx}{\lambda z}\right) + \frac{m^2}{4}\operatorname{sinc}^2\left[\frac{2w}{\lambda z}(x+f_0\lambda z)\right] + \frac{m^2}{4}\operatorname{sinc}^2\left[\frac{2w}{\lambda z}(x-f_0\lambda z)\right]\right\}$$

- Perfil segundo x:

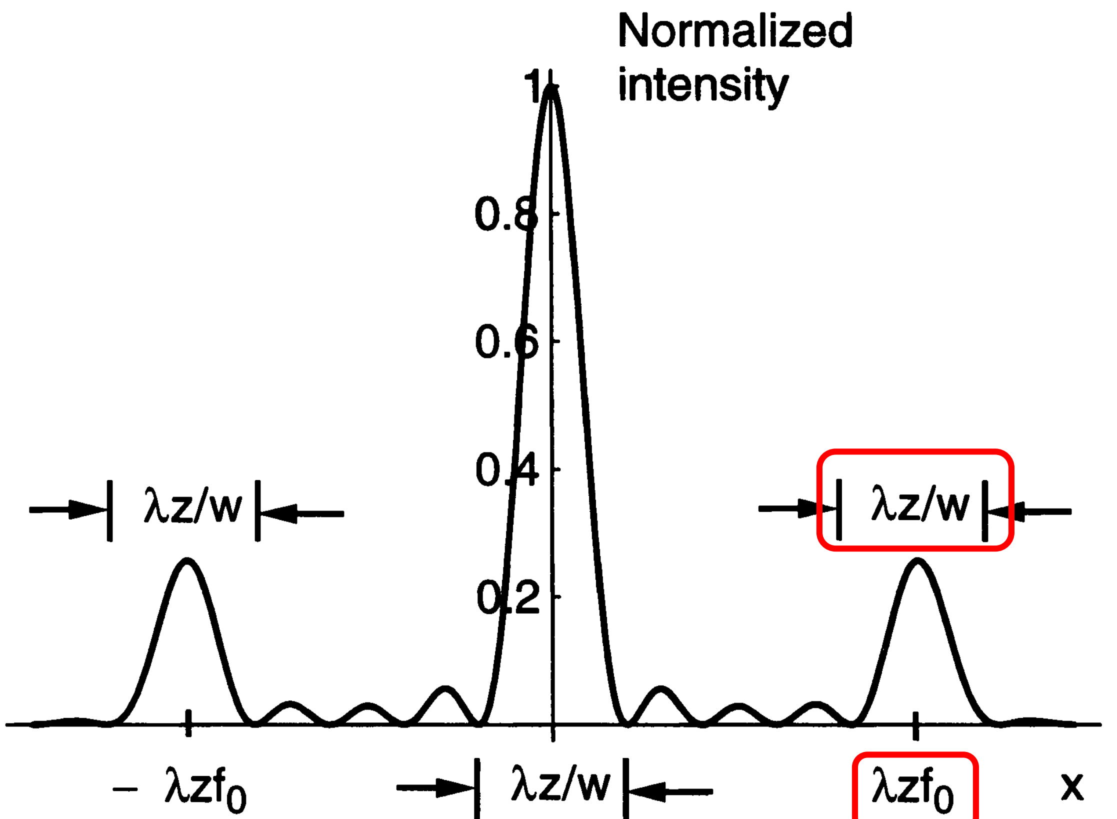


Redes de difracção de amplitude

$$t_A(\xi,\eta) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos(2\pi f_0 \xi)\right] \mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{2w}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{\eta}{2w}\right)$$



$$I(x,y) \approx \left[\frac{A}{2\lambda z}\right]^2 \mathrm{sinc}^2\left(\frac{2wy}{\lambda z}\right)\left\{\mathrm{sinc}^2\left(\frac{2wx}{\lambda z}\right) + \frac{m^2}{4}\mathrm{sinc}^2\left[\frac{2w}{\lambda z}(x + f_0\lambda z)\right] + \frac{m^2}{4}\mathrm{sinc}^2\left[\frac{2w}{\lambda z}(x - f_0\lambda z)\right]\right\}$$



Ordens de difracção

Separação entre ordens

Divisão do fluxo luminoso

Sensibilidade a λ → **Espectometria** → …

Redes de difracção de perfil rectangular (1D)

Rede

$$t(\xi) = \left[\mathrm{rect}\frac{\xi}{a} * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - nb)\right] \mathrm{rect}\frac{\xi}{c} = \left[\mathrm{rect}\frac{\xi}{a} * \frac{1}{b}\mathrm{comb}\frac{\xi}{b}\right] \mathrm{rect}\frac{\xi}{c}$$

Transformada de Fourier

$$f(x)\delta(x-y) = f(y)(x-y)$$

$$T(f_X) = [\mathrm{a\,sinc}(af_X)\ \ \mathrm{comb}(bf_X)] * c\,\mathrm{sinc}(cf_X)$$

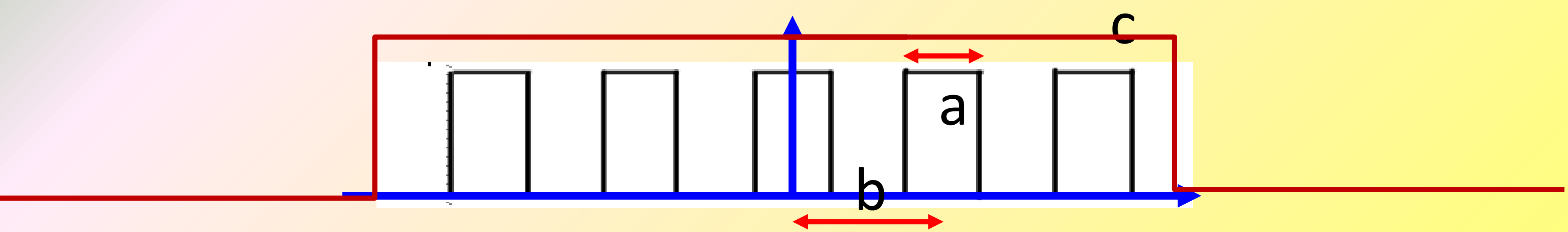
$$T(f_X) = \left[\mathrm{a\,sinc}(af_X)\ \ \frac{1}{b}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f_X - \frac{n}{b}\right)\right] * c\,\mathrm{sinc}(cf_X)$$

$$\delta\left(\frac{x-y}{b}\right) = b\delta(x-y)$$

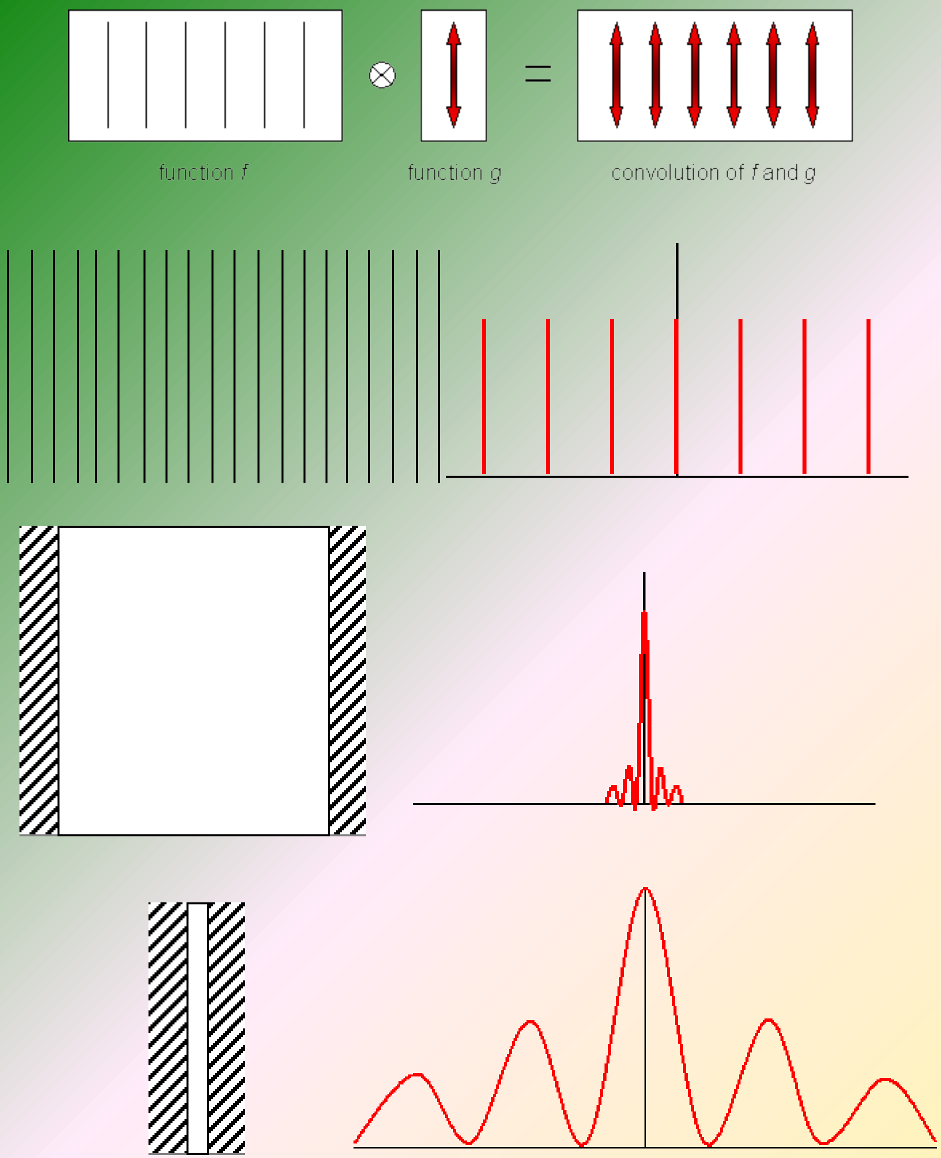
$$T(f_X) = \left[\mathrm{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\left(\frac{a}{b}n\right) \delta\left(f_X - \frac{n}{b}\right)\right] * c\,\mathrm{sinc}(cf_X)$$

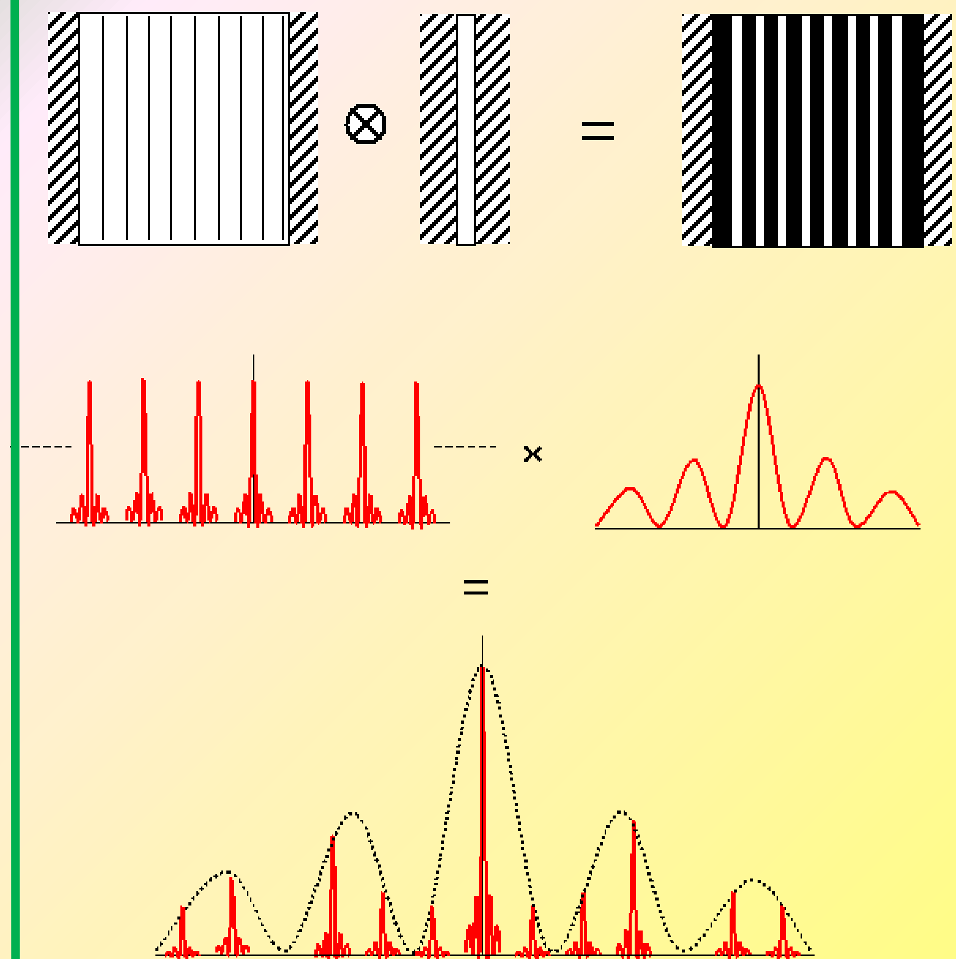
$$T(f_X) = \mathrm{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\left(\frac{a}{b}n\right) \delta\left(f_X - \frac{n}{b}\right) * c\,\mathrm{sinc}(cf_X)$$

$$T(f_X) = \mathrm{ac} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\left(\frac{a}{b}n\right) \mathrm{sinc}\left[c\left(f_X - \frac{n}{b}\right)\right]$$



Redes de difracção de perfil rectangular (2D)

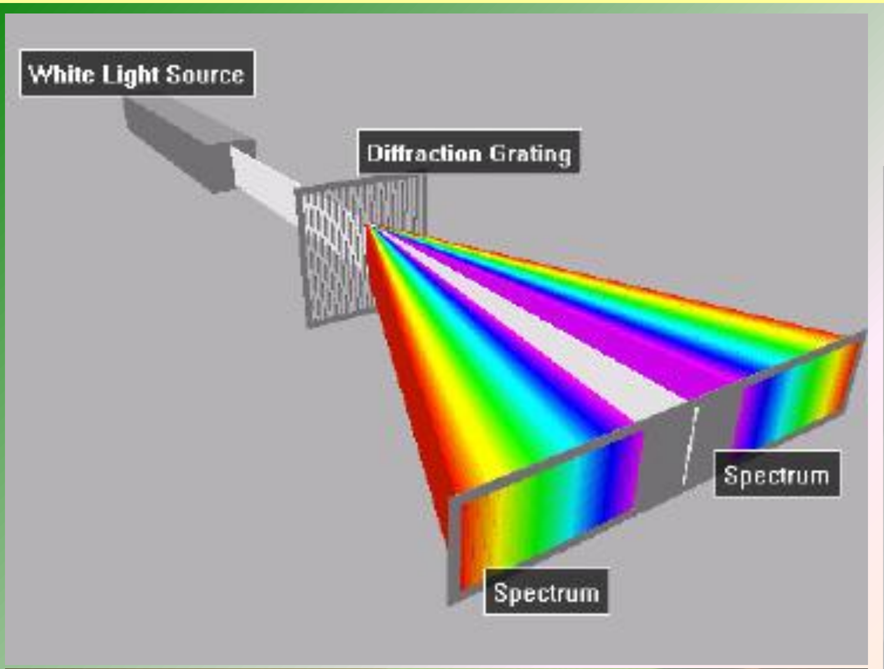


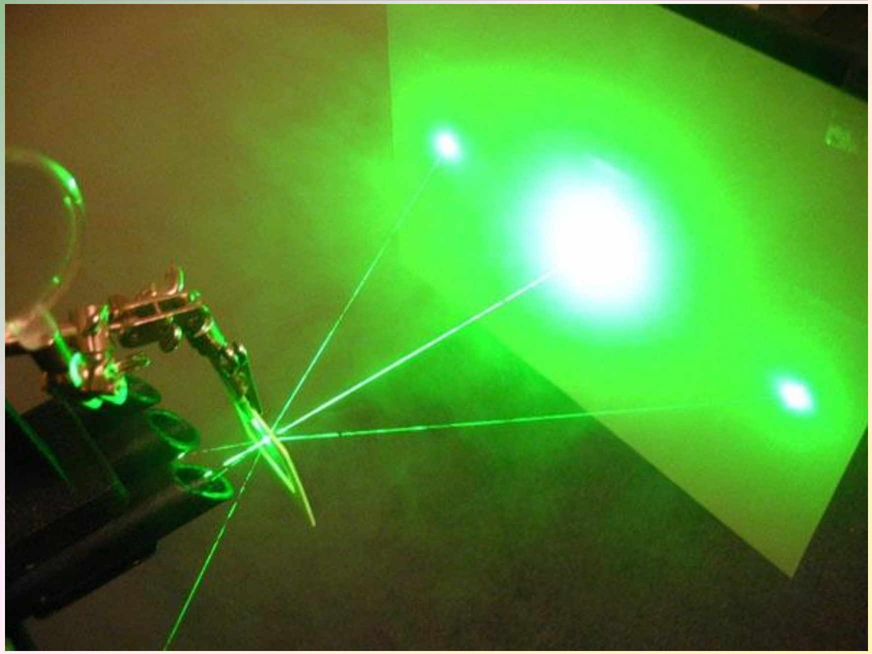


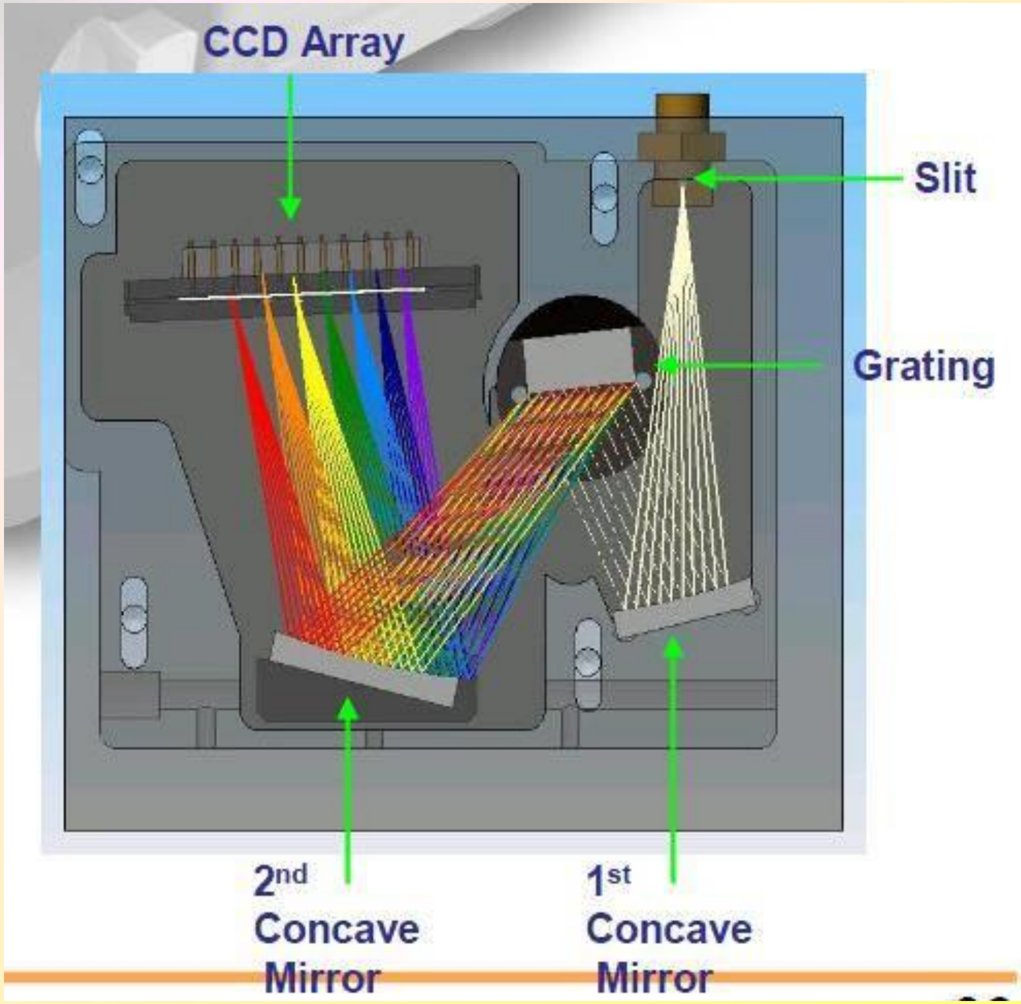
Diffraction pattern from a one dimensional grating with finite width slits. The pattern is comprised of a 'comb' function (from the array of slits), onto which a narrow sinc function is convoluted (from the finite width of the grating). The whole pattern is enveloped by a wide sinc function, shown as the dotted line, which arises as a result of the finite slit width.

https://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/diffraction/convolution.php

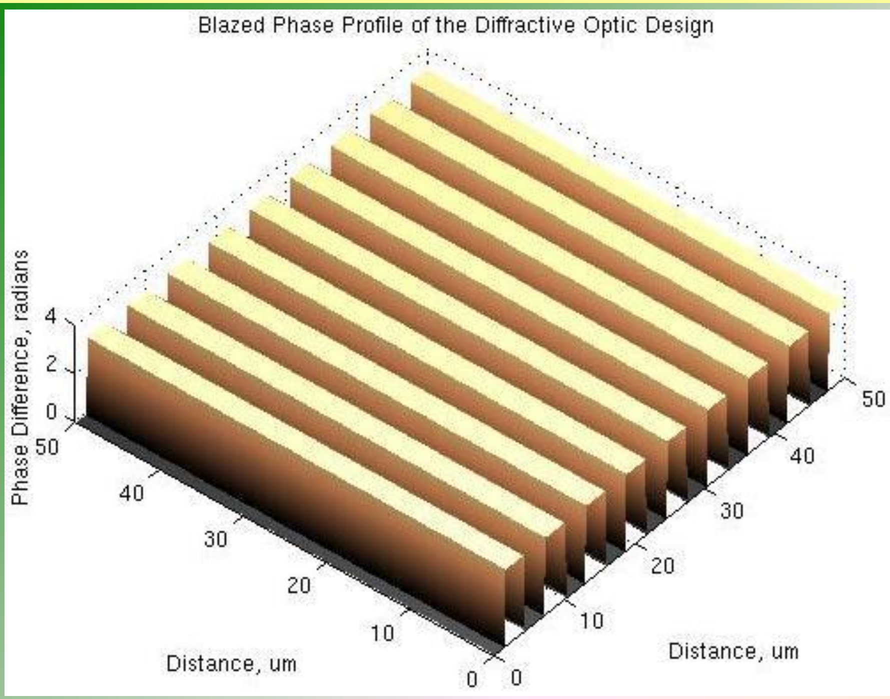
Redes de difracção e espectrómetros

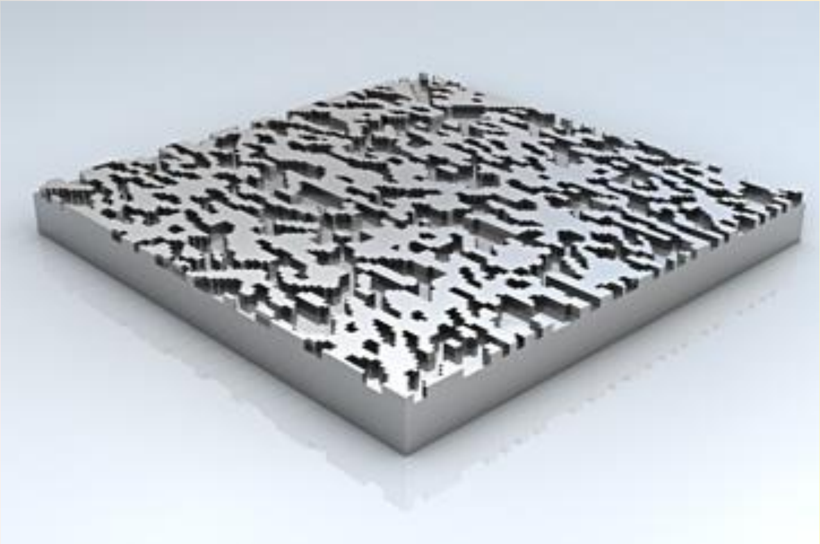


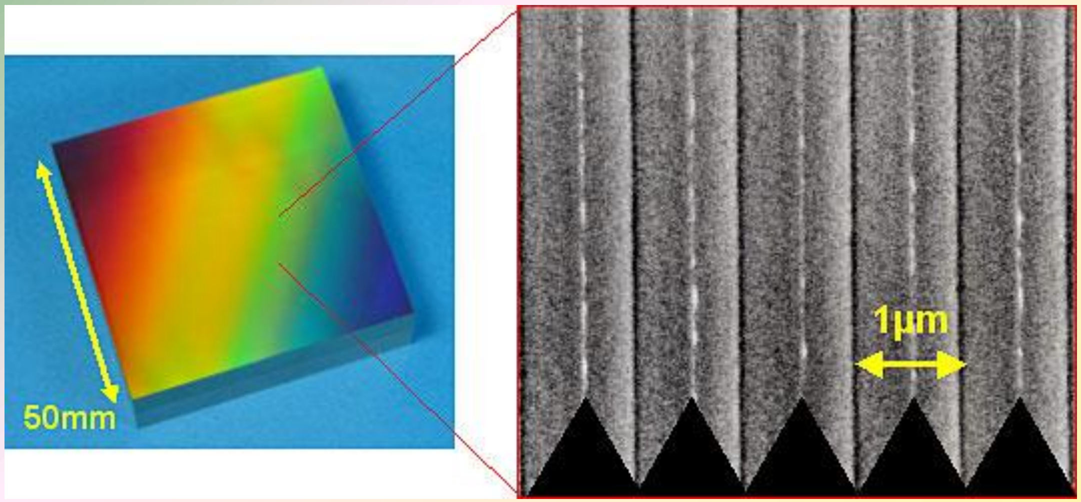


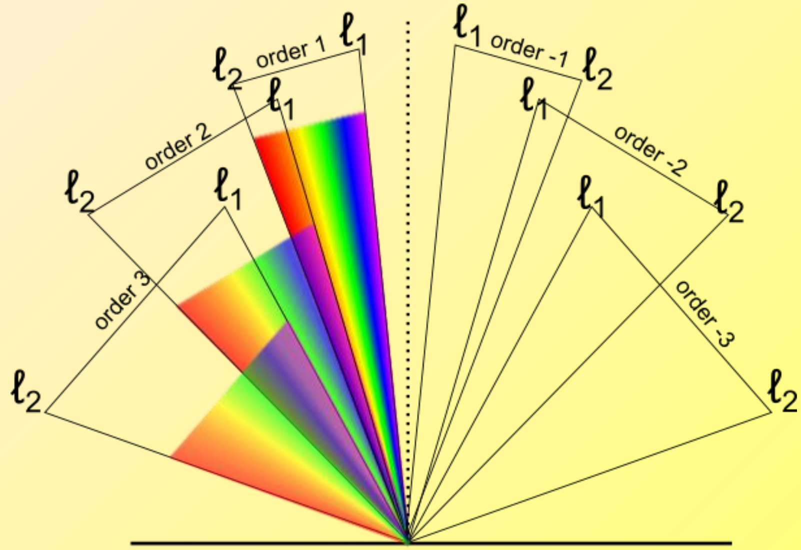


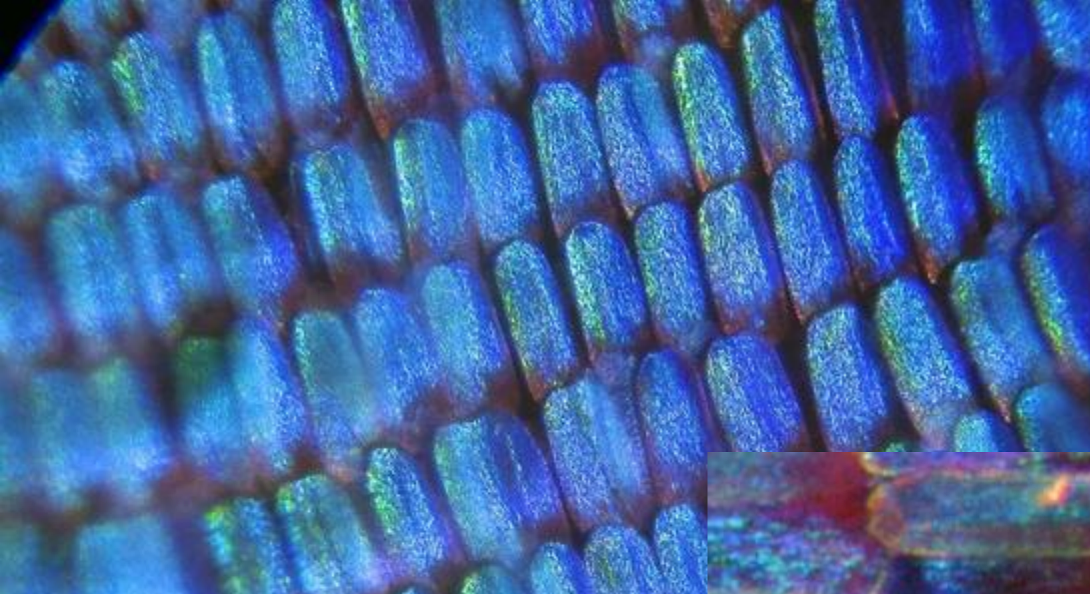
Outras redes de difracção de fase

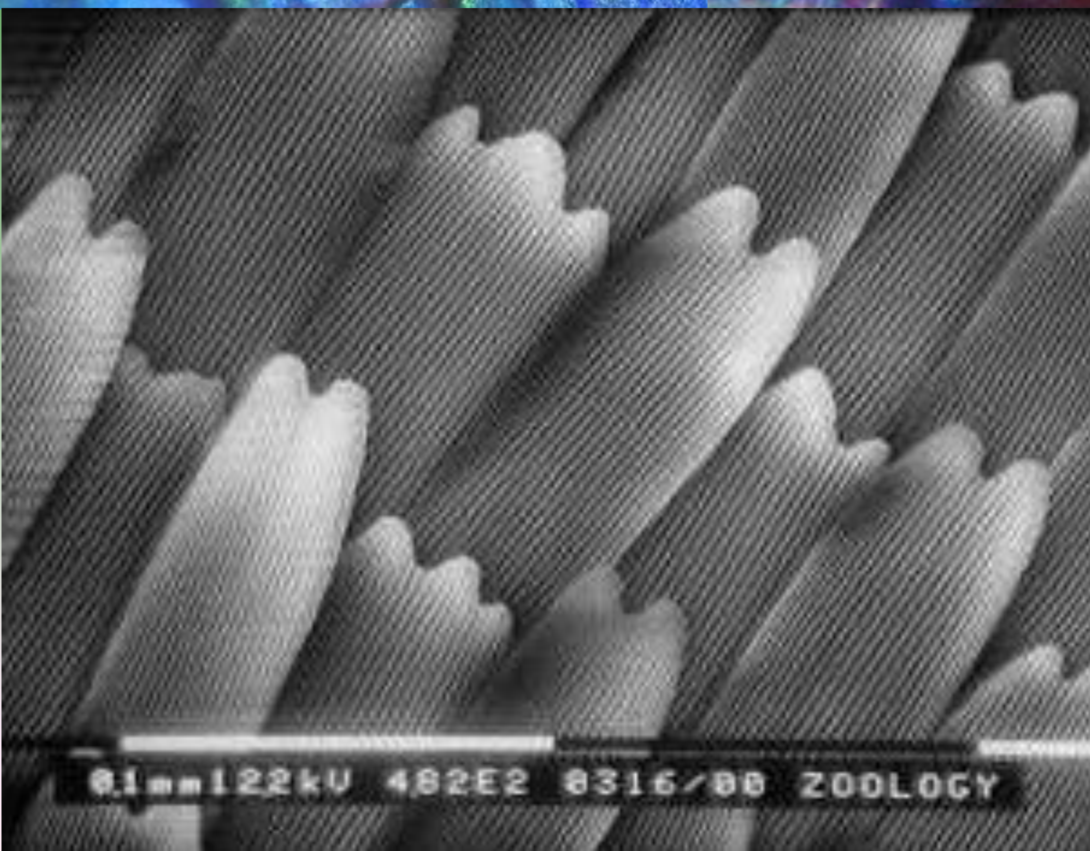


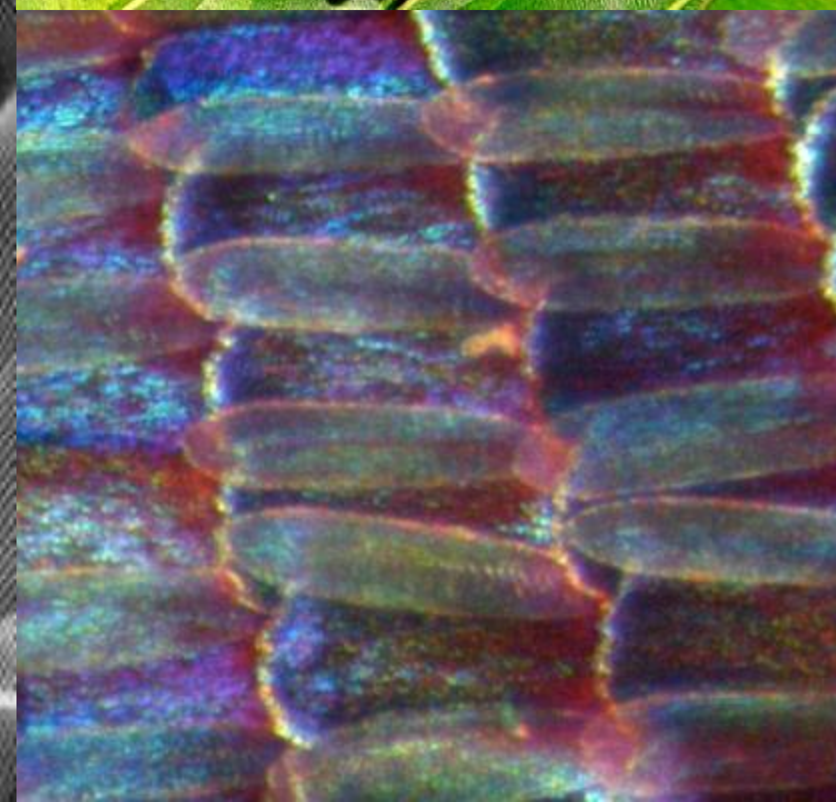




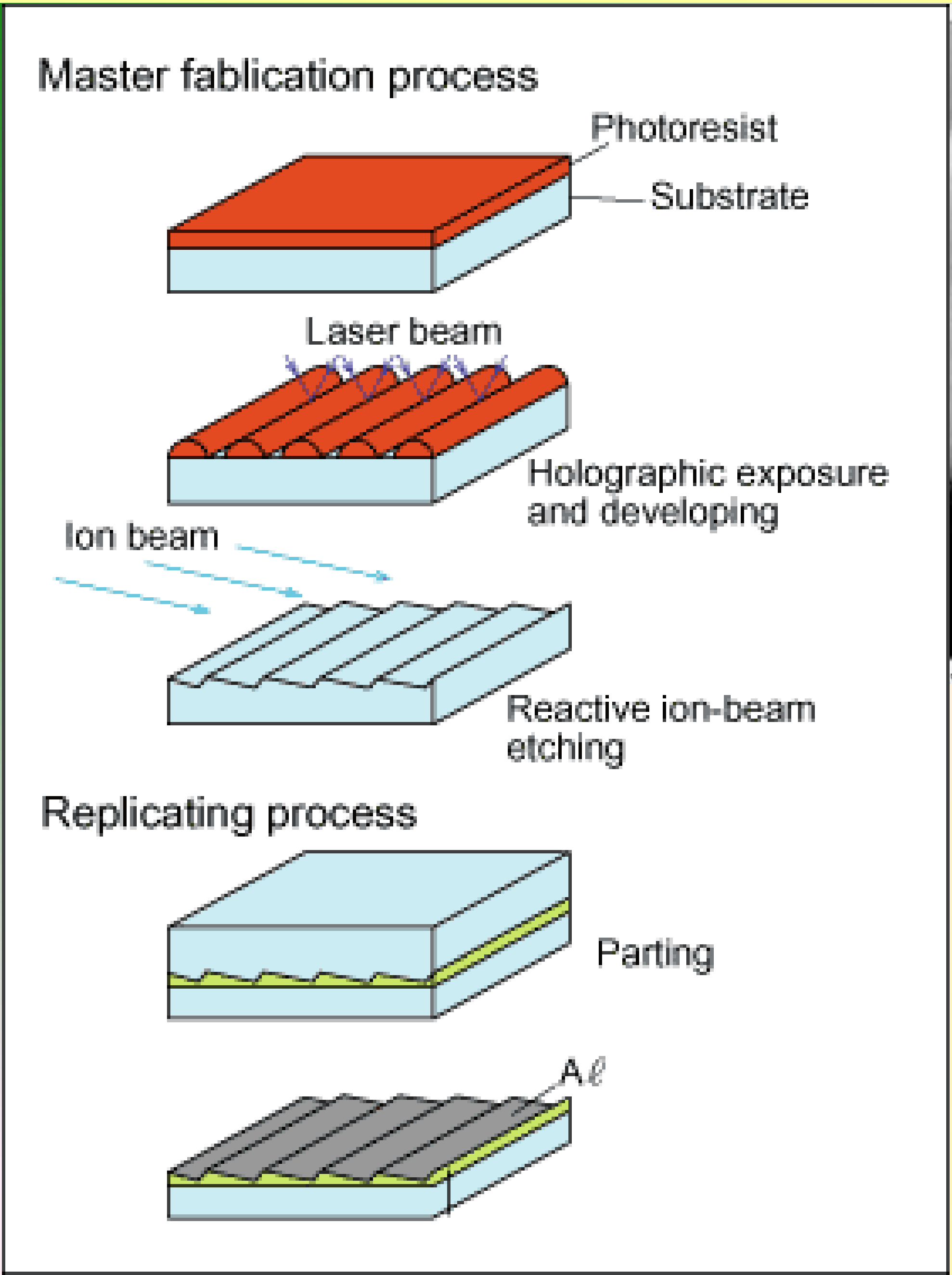


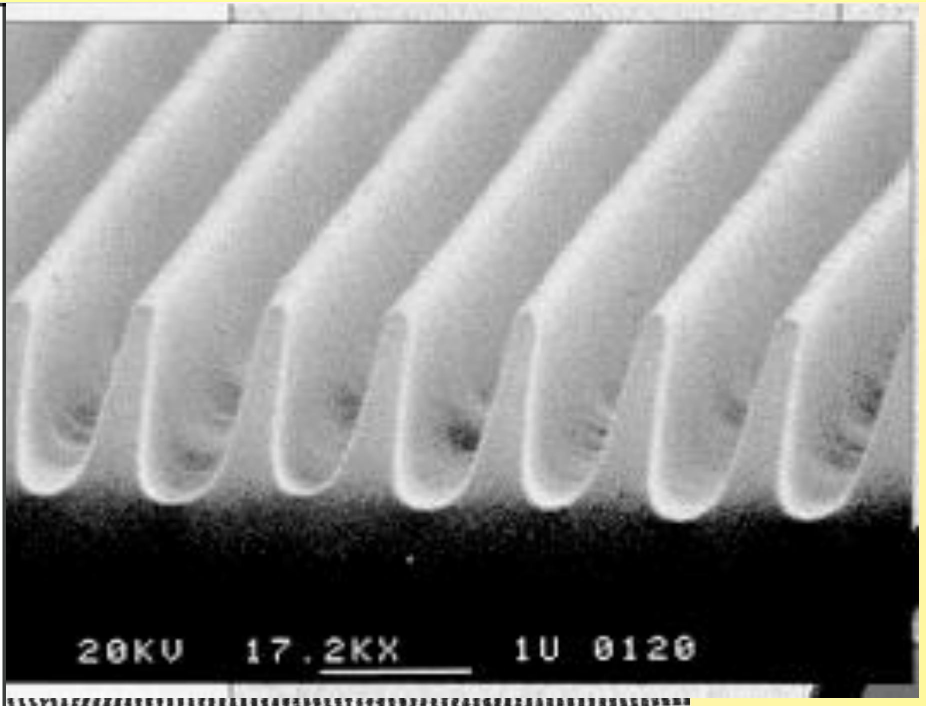



01mm122kV 482E2 0316/00 ZOOLOGY



Redes de difracção de fase

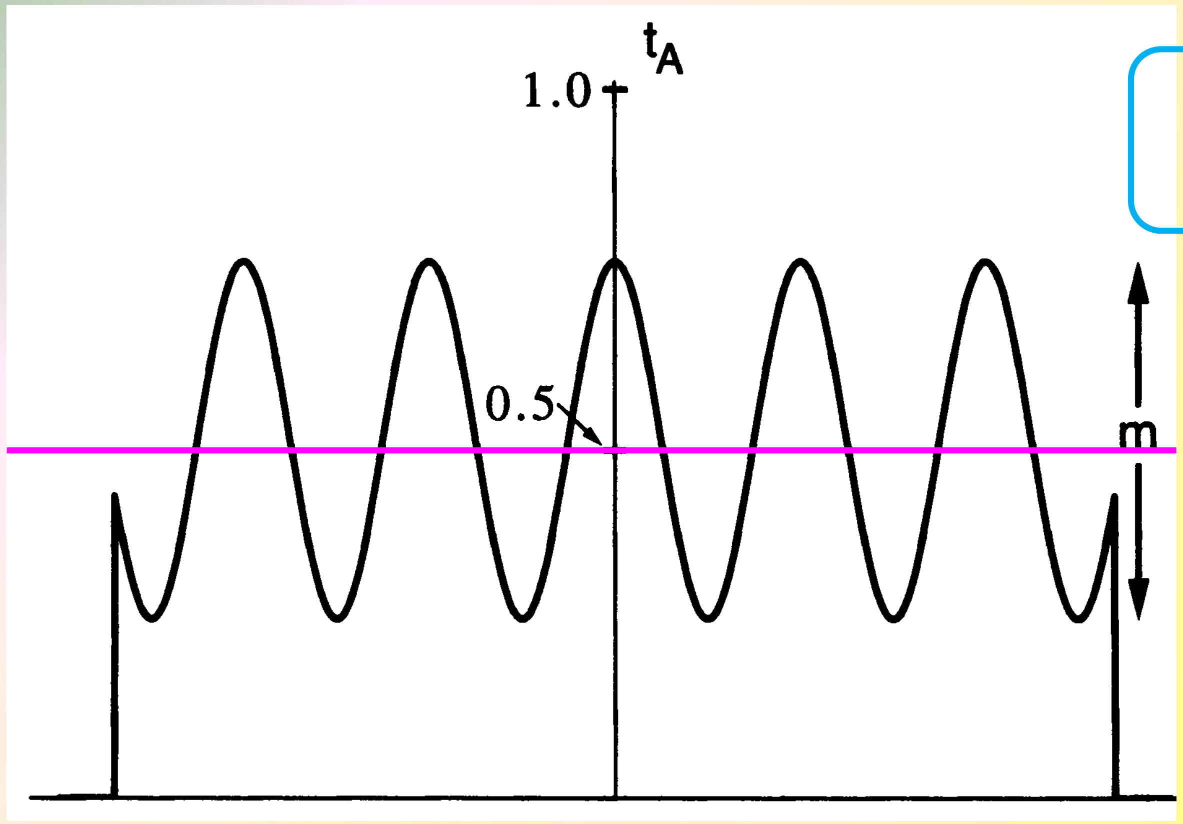




Redes de difracção de fase

- Rede de fase, periódica, linear, segundo o eixo ξ, 2D, de frequência espacial f_0, modulação m, inscrita num quadrado de semi-largura w.
- Função de transmissão em amplitude (complexa):

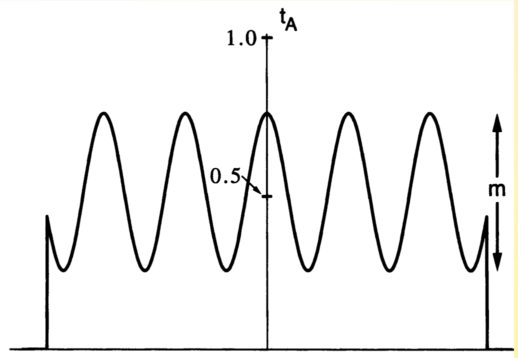
$$\boxed{t_A(\xi,\eta) = \exp\left[j\frac{m}{2}\sin(2\pi f_0\xi)\right]\operatorname{rect}\left(\frac{\xi}{2w}\right)\operatorname{rect}\left(\frac{\eta}{2w}\right)}$$



Topografia da rede

Redes de difracção de fase

$$t_A(\xi,\eta) = \exp\left[j\frac{m}{2}\sin(2\pi f_0\xi)\right]\operatorname{rect}\left(\frac{\xi}{2w}\right)\operatorname{rect}\left(\frac{\eta}{2w}\right)$$



- Iluminação por onda plana (em $z=0^-$): $U_i(\xi,\eta) = 1$.
- Campo no plano da rede (ξ,η), logo depois da rede (em $z=0^+$): $U(\xi,\eta,0) = t_A(\xi,\eta)$
- Teorema da Convolução: $$\mathcal{F}\{gh\} = G(f_X,f_Y) \star\star H(f_X,f_Y)$$
- Reformulação conveniente: $$\exp\left[j\frac{m}{2}\sin(2\pi f_0\xi)\right] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{m}{2}\right)\exp(j2\pi q f_0\xi)$$

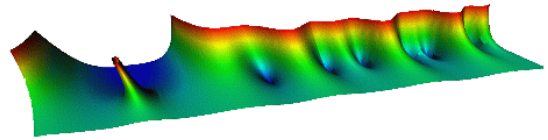
(Função Geradora das funções de Bessel de 1ª espécie)

- Transformadas de Fourier dos dois factores:

$$\mathcal{F}\left\{\operatorname{rect}\left(\frac{\xi}{2w}\right)\operatorname{rect}\left(\frac{\eta}{2w}\right)\right\} = A\operatorname{sinc}(2wf_X)\operatorname{sinc}(2wf_Y)$$

$$\mathcal{F}\left\{\exp\left[j\frac{m}{2}\sin(2\pi f_0\xi)\right]\right\} = \sum_{q=-\infty}^{\boxed{\infty}} J_q\left(\frac{m}{2}\right)\delta(f_X - qf_0, f_Y)$$

NIST – Dig. Library of Mathematical Functions



NIST Digital Library of Mathematical Functions

Project News

2019-03-15 *DLMF Update; Version 1.0.22*
2018-12-15 *DLMF Update; Version 1.0.21*
2018-09-15 *DLMF Update; Version 1.0.20*
2018-06-22 *DLMF Update; Version 1.0.19*
More news

Foreword
Preface
Mathematical Introduction
1 Algebraic and Analytic Methods
2 Asymptotic Approximations
3 Numerical Methods
4 Elementary Functions
5 Gamma Function
6 Exponential, Logarithmic, Sine, and Cosine Integrals
7 Error Functions, Dawson's and Fresnel Integrals
8 Incomplete Gamma and Related Functions
9 Airy and Related Functions
10 Bessel Functions
11 Struve and Related Functions
12 Parabolic Cylinder Functions
13 Confluent Hypergeometric Functions
14 Legendre and Related Functions
15 Hypergeometric Function
16 Generalized Hypergeometric Functions & Meijer G–Function
17 q–Hypergeometric and Related Functions
18 Orthogonal Polynomials
19 Elliptic Integrals
20 Theta Functions
21 Multidimensional Theta Functions
22 Jacobian Elliptic Functions
23 Weierstrass Elliptic and Modular Functions
24 Bernoulli and Euler Polynomials
25 Zeta and Related Functions
26 Combinatorial Analysis
27 Functions of Number Theory
28 Mathieu Functions a
Chapter 26 Combinatorial Analysis
29 Lamé Functions
30 Spheroidal Wave Functions
31 Heun Functions
32 Painlevé Transcendents
33 Coulomb Functions
34 $3j$, $6j$, $9j$ Symbols
35 Functions of Matrix Argument
36 Integrals with Coalescing Saddles
Bibliography
Index
Notations
List of Figures
List of Tables
Software
Errata

https://dlmf.nist.gov/

NIST – Dig. Library of Mathematical Functions

§10.12 Generating Function and Associated Series

For $z \in \mathbb{C}$ and $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

10.12.1
$$e^{\frac{1}{2}z(t-t^{-1})} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_m(z).$$

Jacobi–Anger expansions: for $z, \theta \in \mathbb{C}$,

10.12.2
$$\cos(z\sin\theta) = J_0(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(z)\cos(2k\theta),$$
$$\sin(z\sin\theta) = 2\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(z)\sin((2k+1)\theta),$$

10.12.3
$$\cos(z\cos\theta) = J_0(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(z)\cos(2k\theta),$$
$$\sin(z\cos\theta) = 2\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(z)\cos((2k+1)\theta).$$

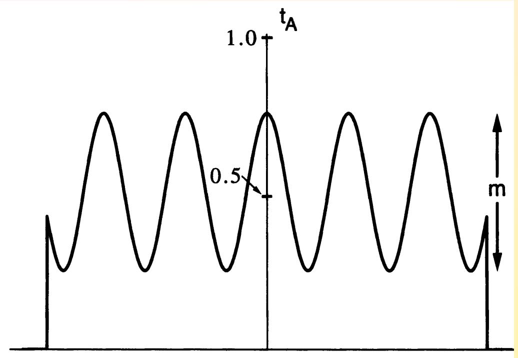
10.12.4
$$1 = J_0(z) + 2J_2(z) + 2J_4(z) + 2J_6(z) + \cdots,$$

10.12.5
$$\cos z = J_0(z) - 2J_2(z) + 2J_4(z) - 2J_6(z) + \cdots,$$
$$\sin z = 2J_1(z) - 2J_3(z) + 2J_5(z) - \cdots,$$

10.12.6
$$\tfrac{1}{2}z\cos z = J_1(z) - 9J_3(z) + 25J_5(z) - 49J_7(z) + \cdots,$$
$$\tfrac{1}{2}z\sin z = 4J_2(z) - 16J_4(z) + 36J_6(z) - \cdots.$$

Redes de difracção de fase

$$t_A(\xi,\eta) = \exp\left[j\frac{m}{2}\sin(2\pi f_0\xi)\right]\operatorname{rect}\left(\frac{\xi}{2w}\right)\operatorname{rect}\left(\frac{\eta}{2w}\right)$$



- Combinando:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{U(\xi,\eta)\} &= \mathcal{F}\{t_A(\xi,\eta)\}\\ &= [A\operatorname{sinc}(2wf_X)\operatorname{sinc}(2wf_Y)]\otimes\left[\sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{m}{2}\right)\delta(f_X-qf_0,f_Y)\right]\\ &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} AJ_q\left(\frac{m}{2}\right)\operatorname{sinc}[2w(f_X-qf_0)]\operatorname{sinc}(2wf_Y).\end{aligned}$$

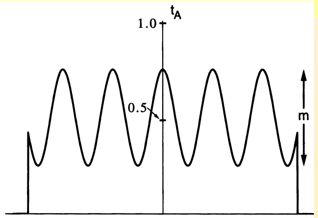
$$U(x,y) = \frac{A}{j\lambda z}e^{jkz}e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}\sum_{q=-\infty}^{\infty}J_q\left(\frac{m}{2}\right)\operatorname{sinc}\left[\frac{2w}{\lambda z}(x-qf_0\lambda z)\right]\operatorname{sinc}\left(\frac{2wy}{\lambda z}\right)$$

- Para se calcular a Irradiância no infinito, $I(x,y) \sim |U(x,y)|^2$. assume-se novamente que:

  $f_0 >> 1/w$ *(muitos ciclos de variação no interior da abertura)*

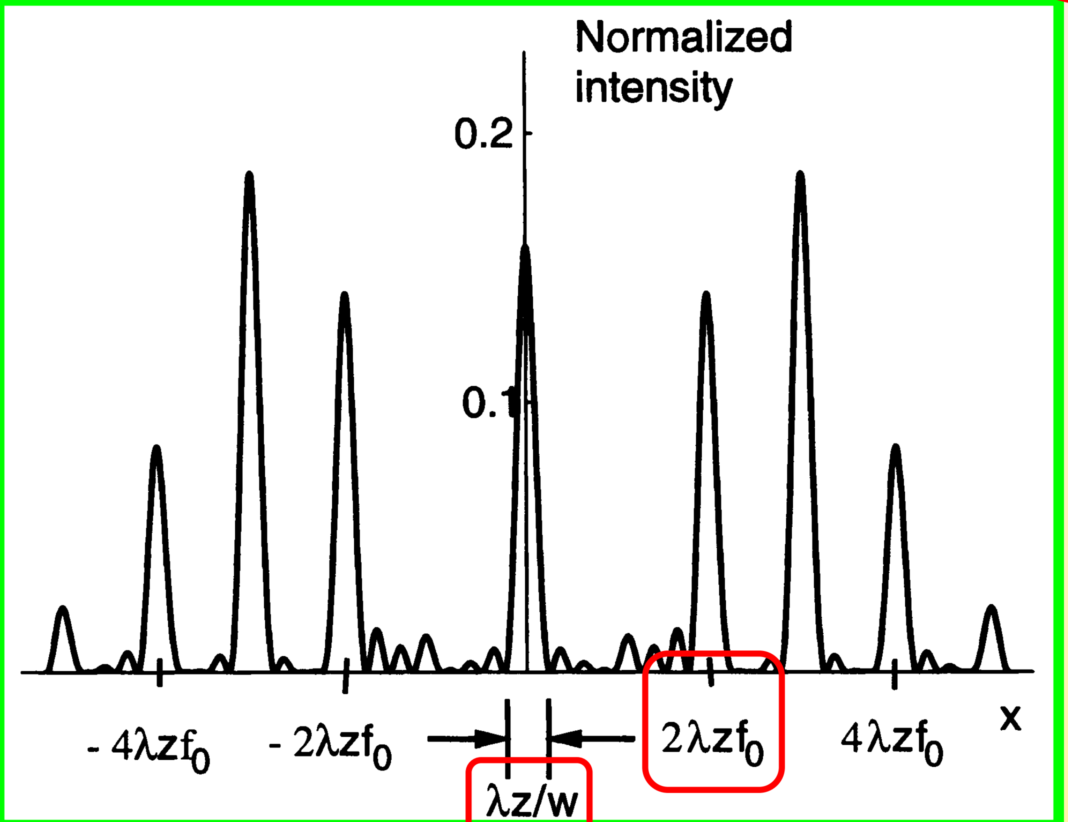
  e os inúmeros sinc's não se sobrepõem. Os produtos cruzados são desprezáveis…
- Logo, a Irradiância será:

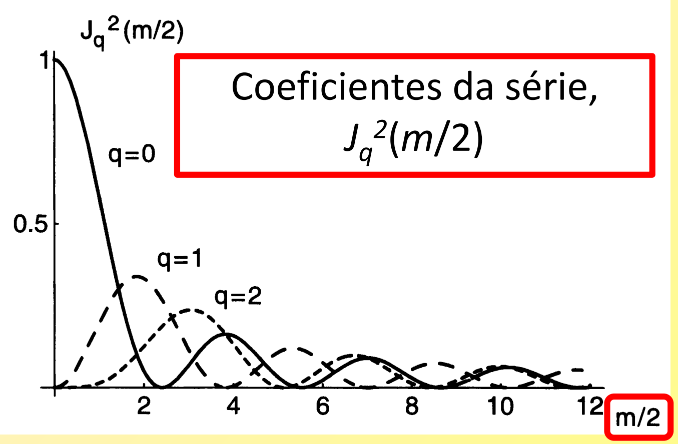
Redes de difracção de fase



$$t_A(\xi,\eta) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos(2\pi f_0 \xi)\right] \mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{2w}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{\eta}{2w}\right)$$

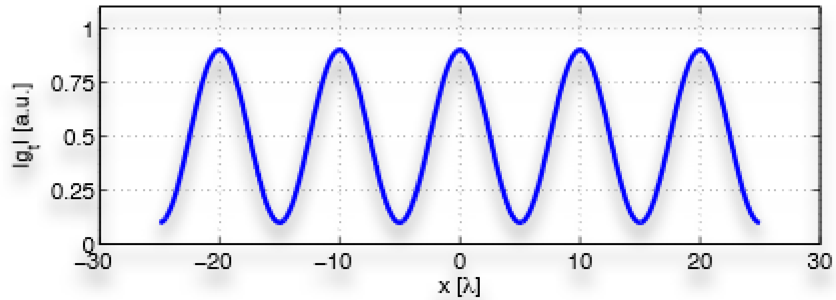
$$I(x,y) \approx \left(\frac{A}{\lambda z}\right)^2 \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q^2\left(\frac{m}{2}\right) \mathrm{sinc}^2\left[\frac{2w}{\lambda z}(x - q f_0 \lambda z)\right] \mathrm{sinc}^2\left(\frac{2wy}{\lambda z}\right)$$

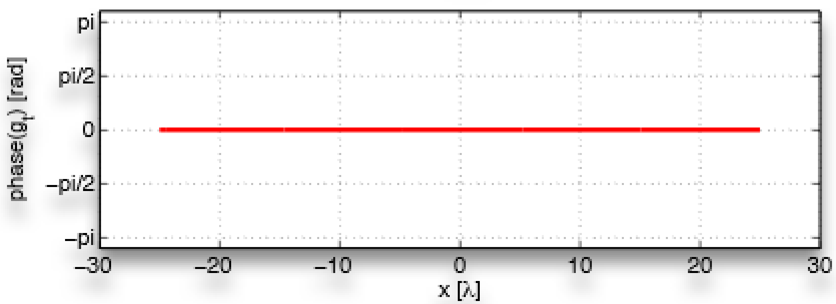


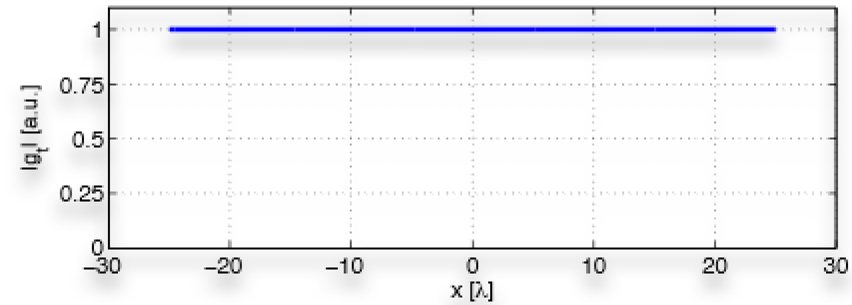


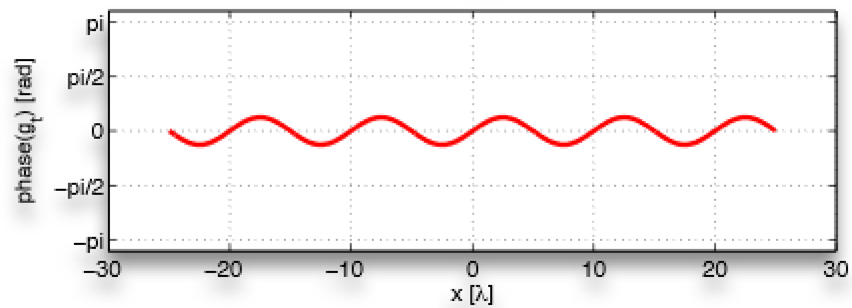
Redes de difracção

Redes de amplitude	Redes de fase









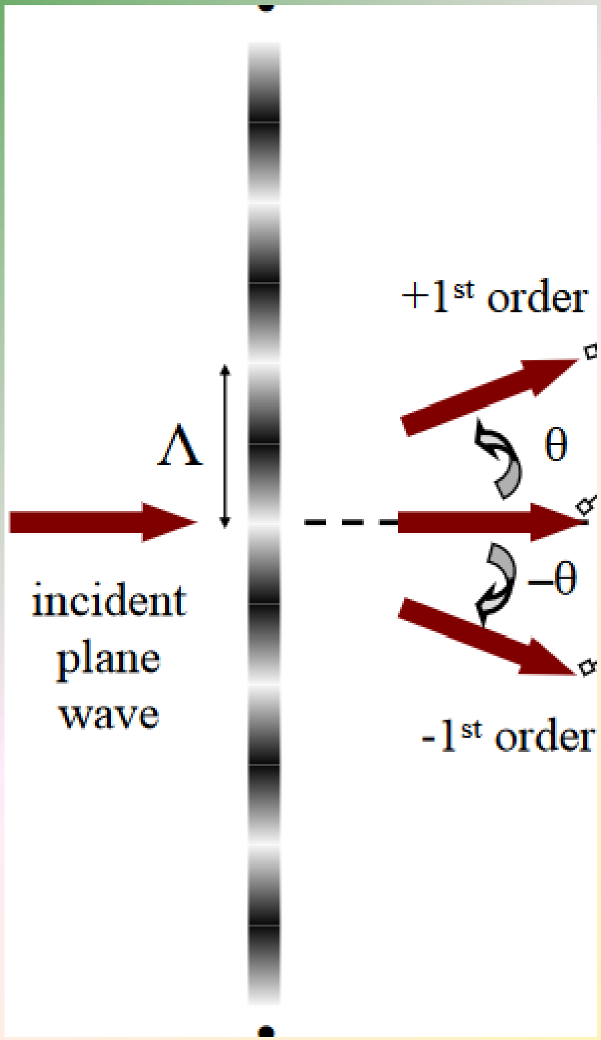
$$\begin{aligned} g_t(x) &= \frac{1}{2}\left[1 + m\cos\left(2\pi\frac{x}{\Lambda} + \phi\right)\right] \\ |g_t(x)| &= \frac{1}{2}\left[1 + m\cos\left(2\pi\frac{x}{\Lambda} + \phi\right)\right] \\ \angle g_t(x) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_t(x) &= \exp\left[i\frac{m}{2}\sin\left(2\pi\frac{x}{\Lambda} + \phi\right)\right] \\ |g_t(x)| &= 1 \\ \angle g_t(x) &= \frac{m}{2}\sin\left(2\pi\frac{x}{\Lambda} + \phi\right). \end{aligned}$$

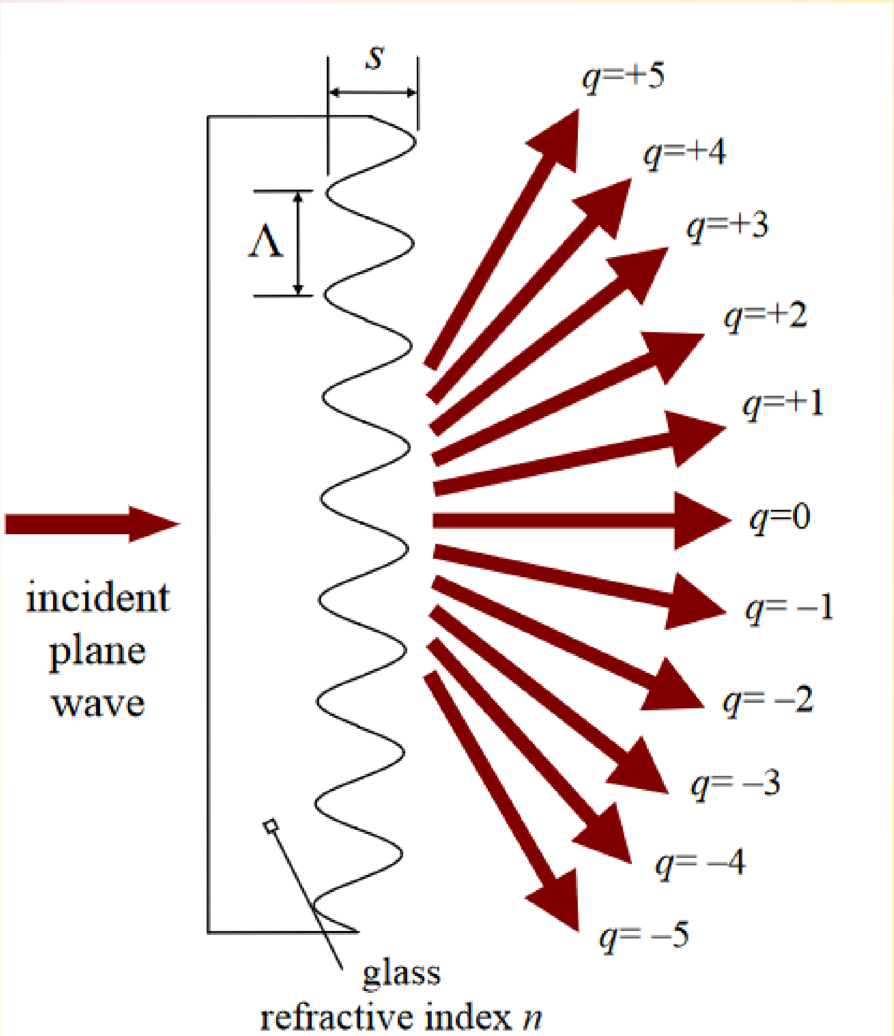
https://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-71-optics-spring-2009/video-lectures/lecture-16-gratings-amplitude-and-phase-sinusoidal-and-binary/MIT2_71S09_lec16.pdf

Redes de difracção

Redes de amplitude sinusoidais

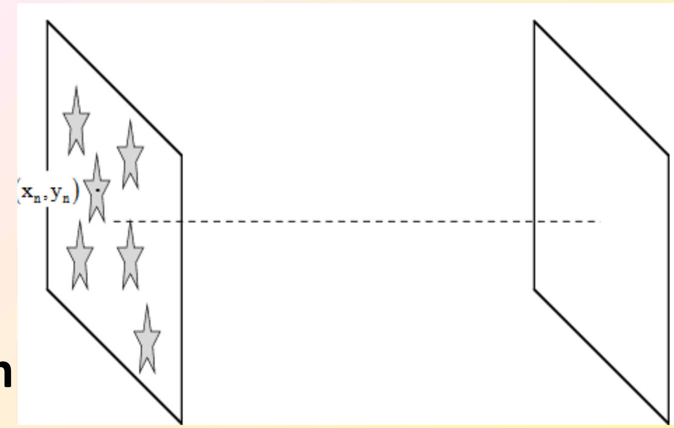


Redes de fase sinusoidais

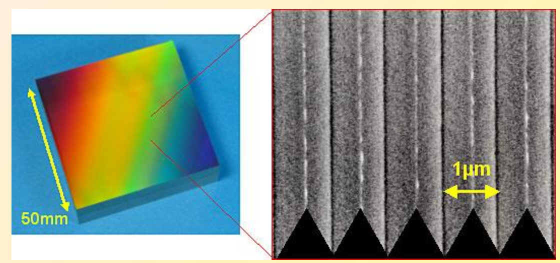


Múltiplas aberturas identicas

- Um objecto pode ser constituído por um conjunto de muitos motivos (de *amplitude* ou de *fase*) M identicos, distribuídos periódica ou aleatoriamente:

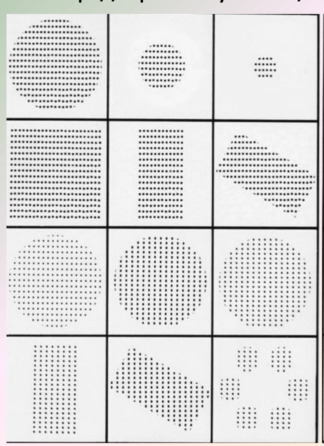


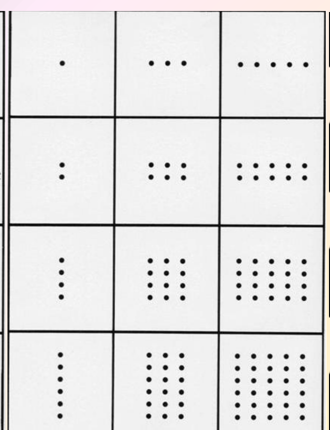
- O padrão de difracção **do conjunto** é determinado pelo padrão de difracção do motivo, D_M, multiplicado por uma função, Φ, com **máximos bem definidos**, tanto mais bem definidos quanto mais periódica for a distribuição e maior o número de repetições: Equação das rede, Teorema matricial

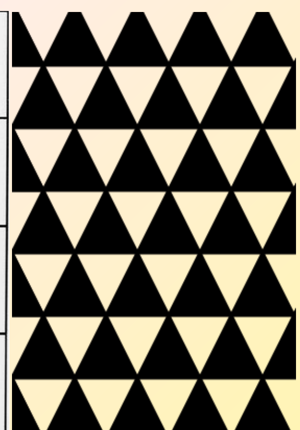


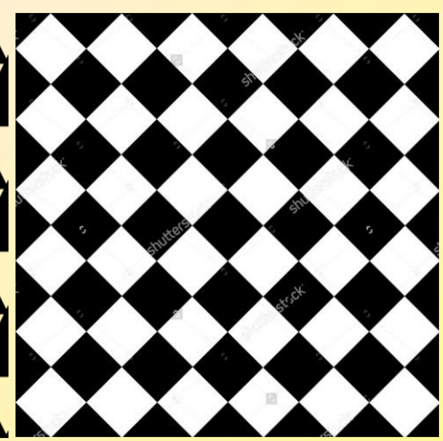
Hecht, 10.2.9, pág. 4.8.3

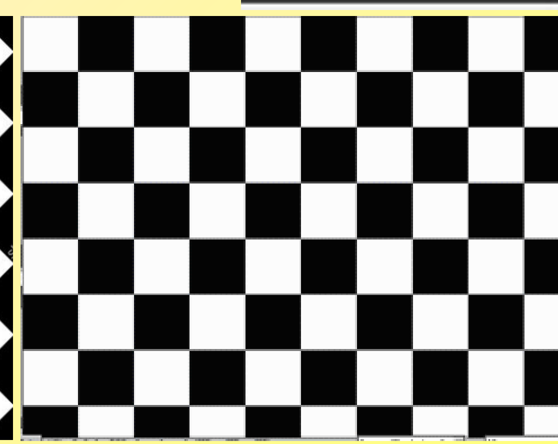
http://optics.byu.edu/PrevText/BYUOptics11.pdf







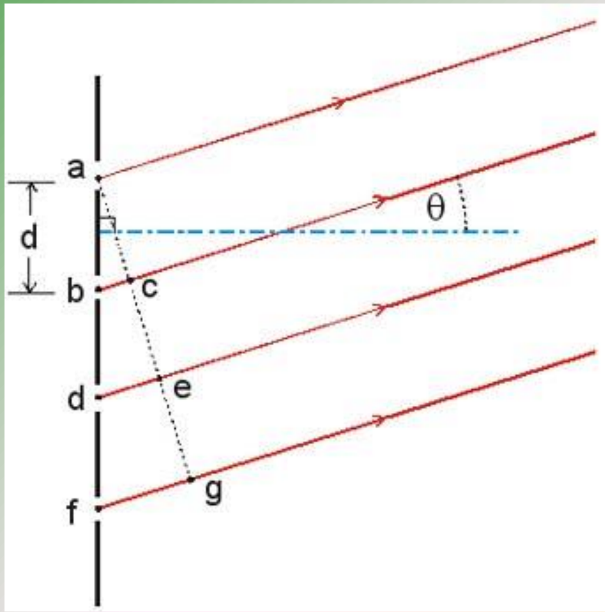




Equação das redes

Para motivos muito finos, os **MÁXIMOS** ocorrem segundo direcções θ_m ao longo das quais as ondas **interfiram construtivamente**:

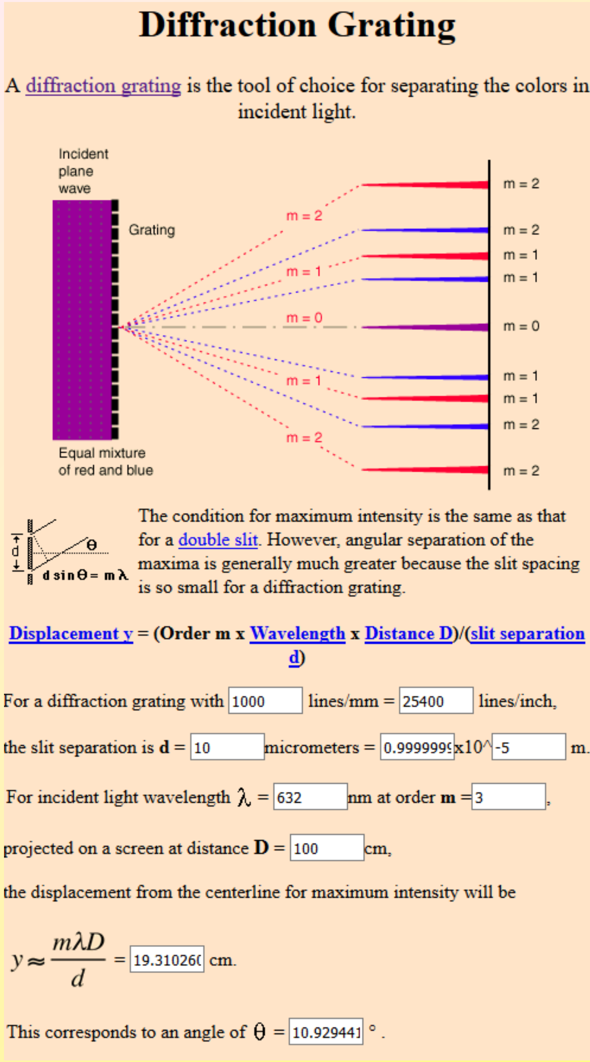
- diferenças de fase entre feixes consecutivos múltiplas de 2π
- diferenças entre percursos ópticos múltiplas de λ



$$d\,(\sin\theta_m + \sin\theta_i\,) = m\lambda$$

$$\theta_i = 0 \rightarrow \; d\sin\theta_m = m\lambda$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$



http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/phyopt/gratcal.html

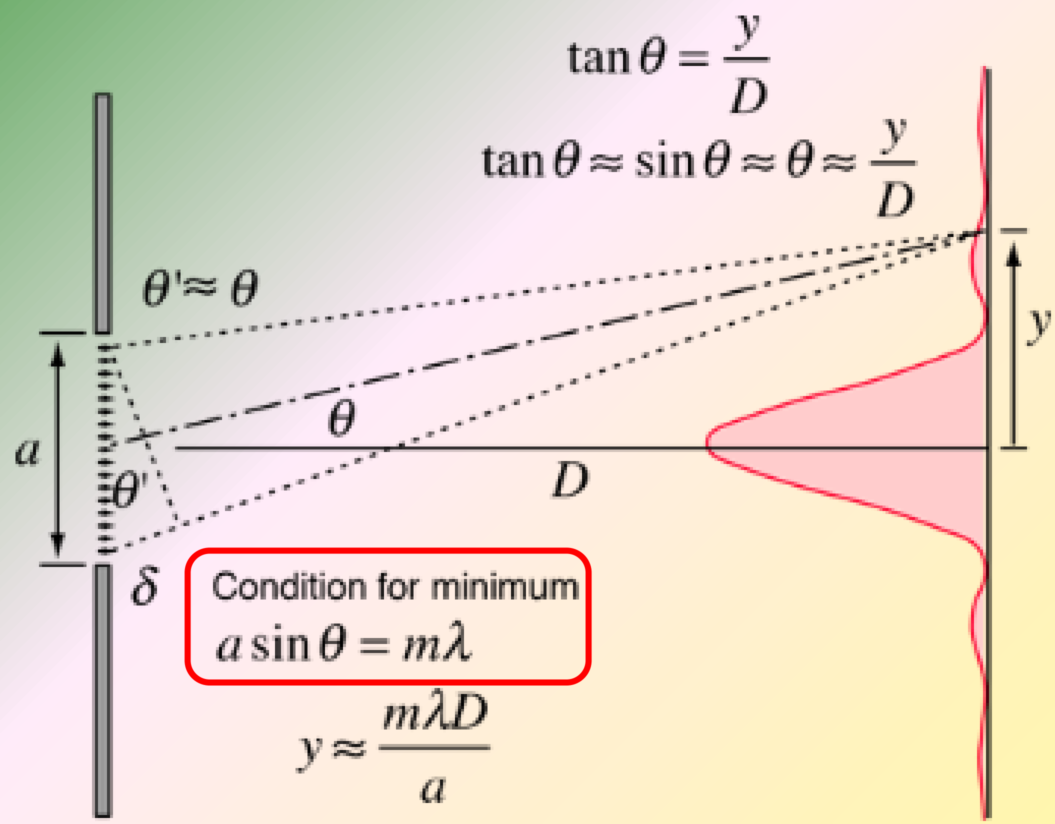
A equação das redes nada diz sobre a distribuição de energia entre as várias *ordens*, nem sobre a estrutura fina de cada ordem. **NUNCA CONFUNDIR COM … →**

https://terpconnect.umd.edu/~toh/models/DiffractionGrating.html

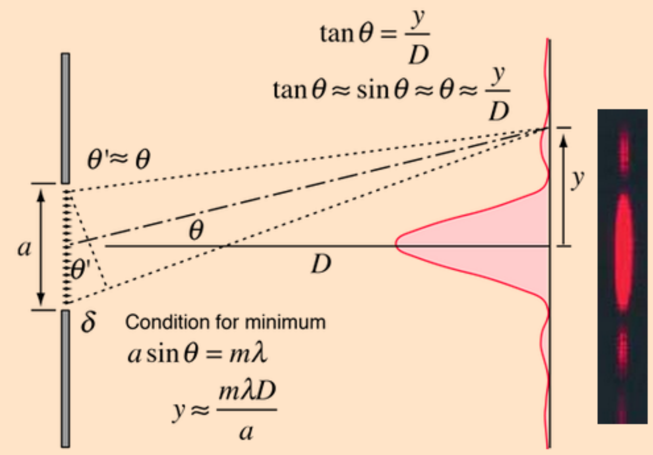
Difracção por uma fenda

Para fendas únicas de largura a, o m[ésimo] **MÍNIMO** ocorre segundo a direcção θ_m para a qual:

$$a \sin \theta_m = m\lambda$$



Fraunhofer Single Slit



The diffraction pattern at the right is taken with a helium-neon laser and a narrow single slit.

More conceptual details about single slit diffraction

The active formula below can be used to model the different parameters which affect diffraction through a single slit. Enter the available measurements or model parameters and then click on the parameter you wish to calculate.

Displacement y = (Order m x Wavelength x Distance D)/(slit width a)

For a slit of width **a** = ____ micrometers = ____ x10^ ____ m

and light wavelength λ = ____ nm at order **m** = ____.

on a screen at distance **D** = ____ cm

the displacement from the centerline for minimum intensity will be

$y \approx \frac{m\lambda D}{a}$ = ____ cm.

This corresponds to a diffraction angle of θ = ____ °.

http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/phyopt/sinslit.html

Redes de difracção

Nas redes, o motivo individual, de largura a, replica-se periodicamente, N vezes.

O espectro de difracção do motivo determina a intensidade relativa das várias ordens.

A equação das redes ($d \sin \theta_m = m\lambda$) fixa, através de d, as direcções segundo as quais se distribuem as ordens.

Quanto menor for d (e maior a frequência da rede, $f = 1/d$) maior o ângulo entre ordens consecutivas (e maiores são os valores dos ângulos de difracção).

Quanto maior for N, menor é a largura de cada ordem, e mais reduzido é o nível do sinal entre as ordens.

As distâncias entre ordens no plano de observação (à distância z da rede) não são constantes. Se x_n representar a posição da ordem n:

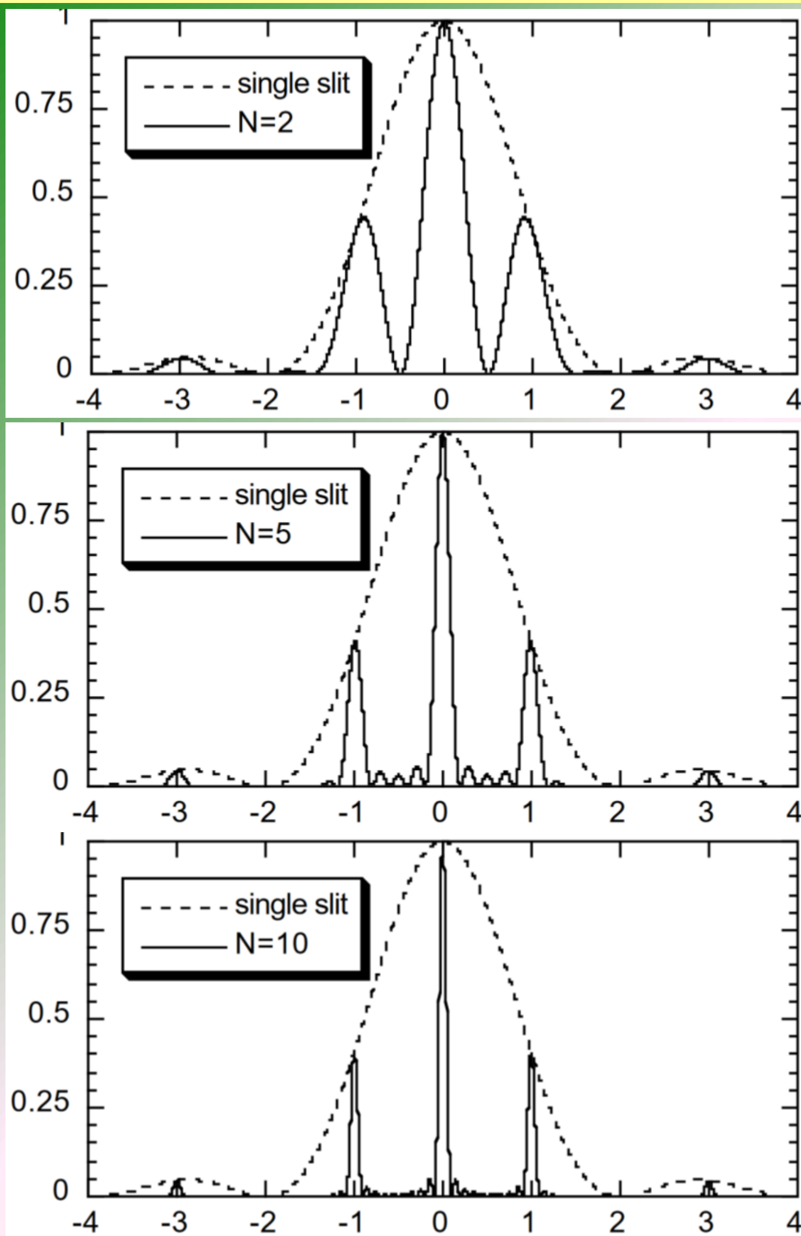
$$x_n = n\lambda z\,(d^2 - n^2\lambda^2)^{-1/2}$$

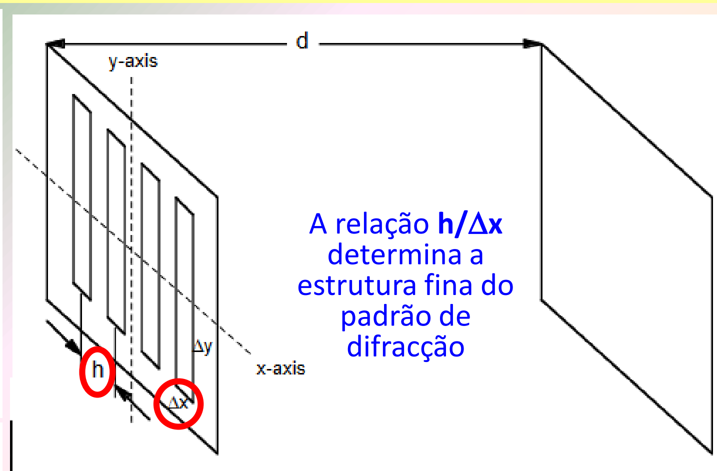
Como a radicanda tem de ser positiva, o número máximo de ordens (inteiro):

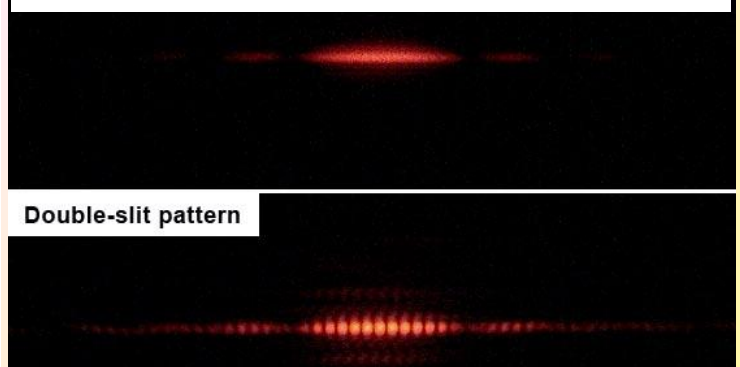
$$n \leq d/\lambda.$$

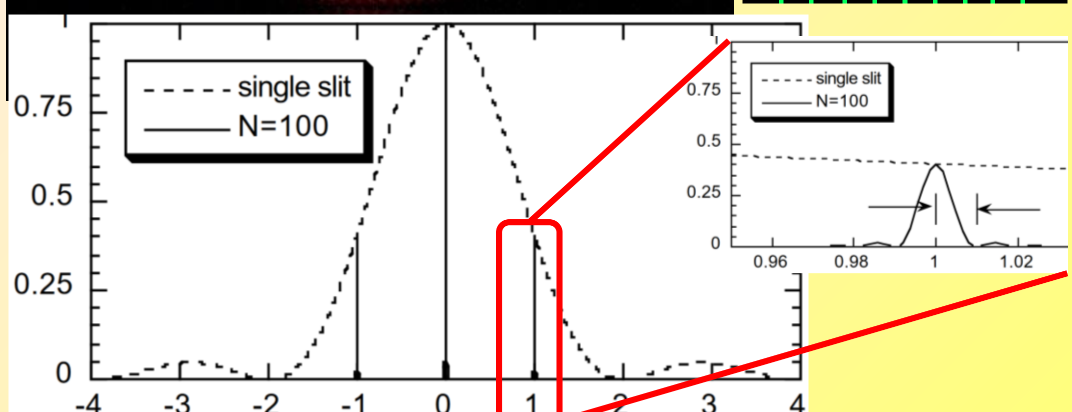
Consoante a relação entre a e d, podem não ser visíveis todas as ordens.

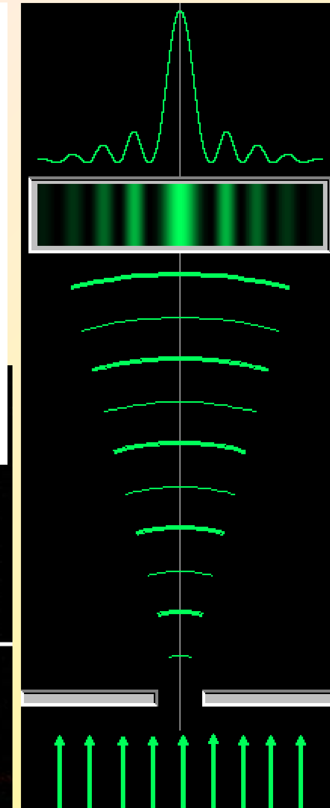
Redes de difracção (amplitude)





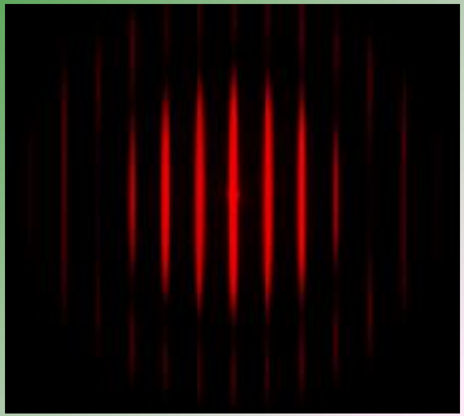


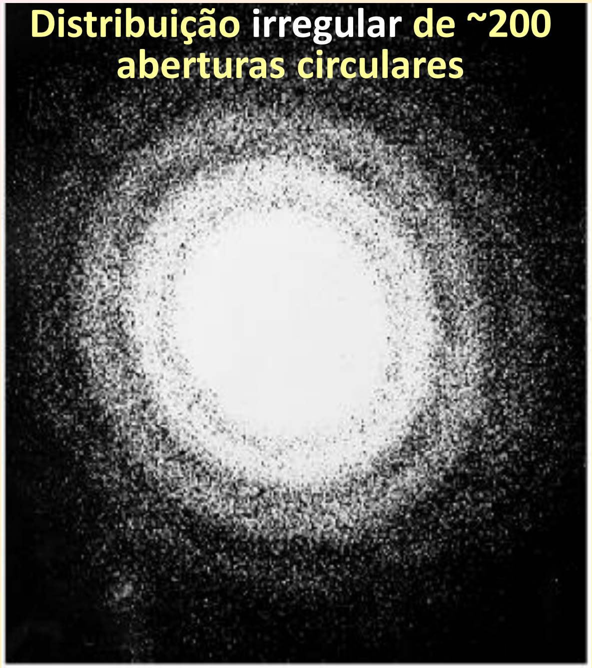


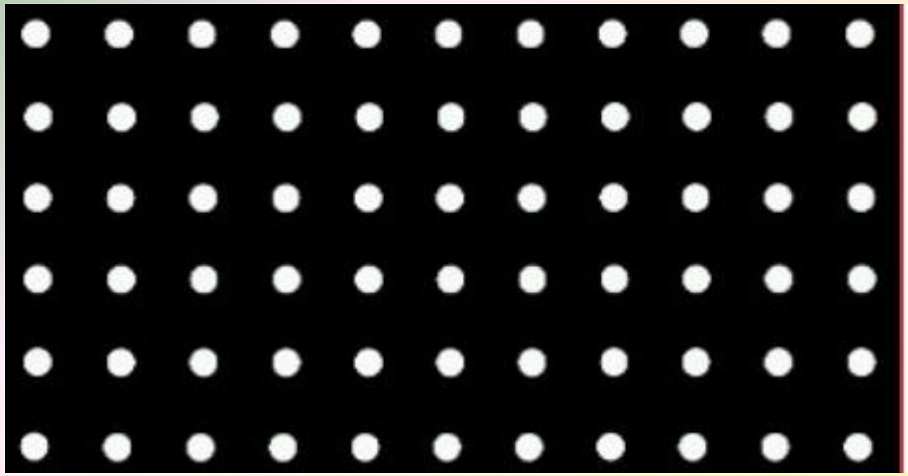


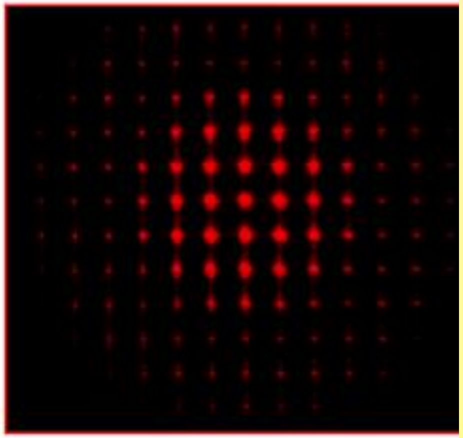
Redes de difracção (amplitude): regulares e irregulares

$$\mathcal{F}\{g(x-a,\, y-b)\} = G(f_X, f_Y)\exp[-j2\pi(f_X a + f_Y b)]$$







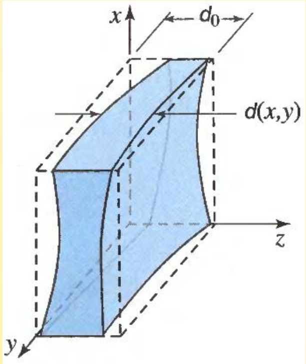


Função de Transmissão em Amplitude (FTA)

1. FONTE GERA UMA ONDA QUE SE PROPAGA, EM **ZZ,** ATÉ AO **OBJECTO**, QUE SE ENCONTRA EM **$Z = 0$:** **$U^-(x,y) = |U^-| \exp(i\varphi^-)$**

2. O OBJECTO ALTERA A ONDA INCIDENTE **($Z=0^-$)**, GERANDO-SE UMA ONDA EMERGENTE ($Z=0^+$), **$U^+(x,y) = |U^+| \exp(i\varphi^+)$**

3. A ONDA EMERGENTE CONTINUA A PROPAGAR-SE, DE ACORDO COM O PRINCÍPIO DE H-F, ALTERADA COM AS CARACTERÍSTICAS DO OBJECTO.



Como se descreve o objecto, de forma a calcular a onda emergente?

Considera-se o objecto inscrito num paralelepípedo, com faces planas.

Define-se a **Função de Transmissão em Amplitude**, $\boldsymbol{t}(x,y)$, [FTA] tal que:

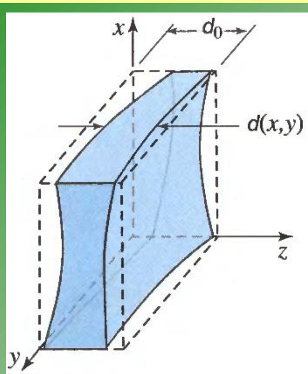
$$U^+(x,y) = \boldsymbol{t}(x,y)\, U^-(x,y)$$

$$|U^+(x,y)| = |\boldsymbol{t}(x,y)|\ |U^-(x,y)| \qquad \text{e} \qquad \varphi^+(x,y) = \phi_0(x,y) + \varphi^-(x,y)$$

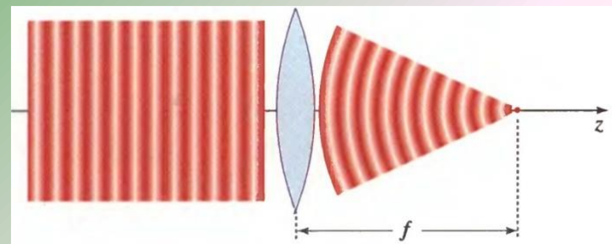
A FTA pode ser de:

Fase	$\lvert \boldsymbol{t} \rvert = t_0$	Apenas varia a fase de U^-
Amplitude	$\phi = \phi_0$	Apenas varia o módulo de U^-
Híbrida	$\boldsymbol{t}(x,y) = \lvert \boldsymbol{t}(x,y) \rvert\, e^{i\phi(x,y)}$	

Exemplos de FTA's

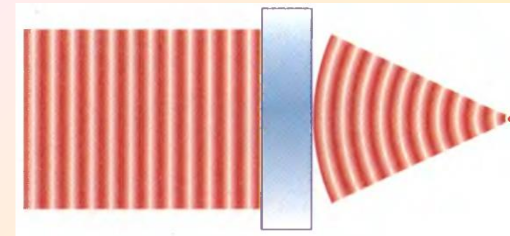


$t(x,y) = h_0 \exp[-i(n-1)\, k_0\, d(x,y)]$

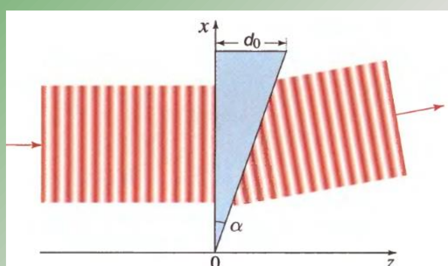


$$t(x,y) \approx h_0 \exp\left[-jk_o \frac{x^2+y^2}{2f}\right]$$

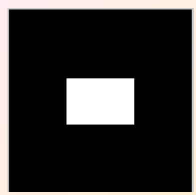
$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$



$t(x,y) = h_0 \exp[-i\, n(x,y)\, k_0\, d_0]$

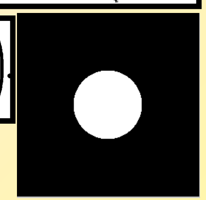


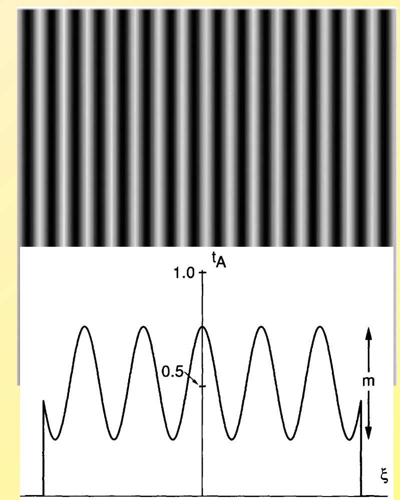
$$t(x,y) = h_0 \exp[-j(n-1)k_o \alpha x]$$



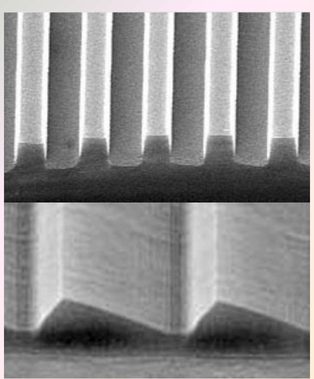
$$t_A(\xi,\eta) = \mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{2w_X}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\eta}{2w_Y}\right)$$

$$t_A(q) = \mathrm{circ}\left(\frac{q}{w}\right)$$





$$t_A(\xi,\eta) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\cos(2\pi f_0 \xi)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{2w}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\eta}{2w}\right)$$



$$t_A(\xi,\eta) = \exp\left[j\frac{m}{2}\sin(2\pi f_0 \xi)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{2w}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\eta}{2w}\right)$$

Elementos transmissivos

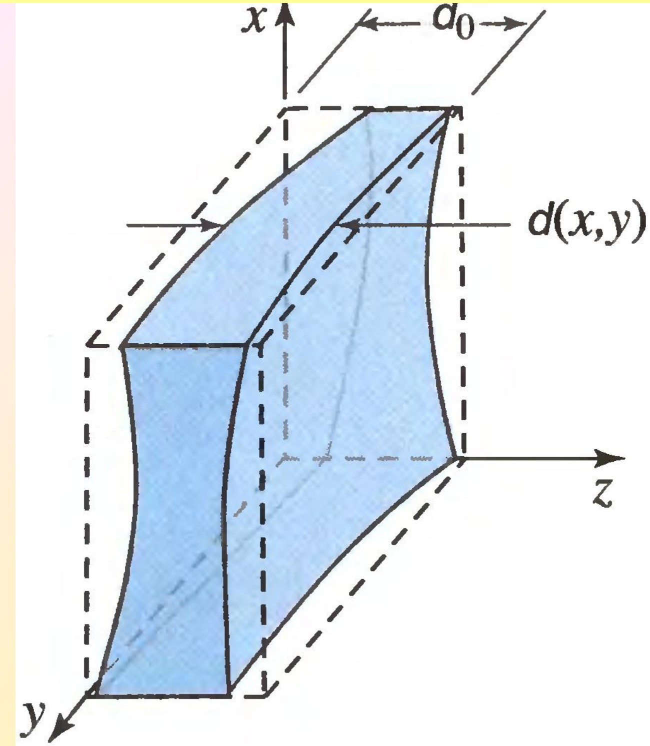
Um componente é limitado pelos planos **$z=0$** e **$z=d_0$**.

A espessura **$d(x,y)$** varia *lentamente*.

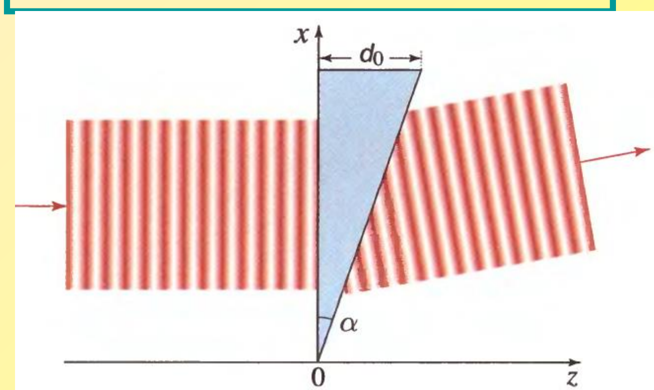
O onda incidente é descrita na aproximação **paraxial**, os ângulos de incidência são pequenos, o desvio lateral insignificante

A **função de transmissão em amplitude** (FTA) do componente refere-se à estrutura paralepipédica de espessura **d_0**, com índices:

ar – n – ar



Prismas - Saleh, Problema 2.4-1



$$t(x,y) = h_0 \exp[-j(n-1)k_o \alpha x]$$

A onda atravessa:

uma espessura **$d(x,y)$** de **material** (índice n)

uma espessura **$d_0-d(x,y)$** de **ar** (índice 1)

$$t(x,y) = h'_0 \ \exp[-ink_0 d(x,y)] \ \exp\{-ik_0 [d_0 - d(x,y)]\}$$

$$\mathbf{t(x,y) = h_0 \exp[-i(n-1)\, k_0\, d(x,y)]}$$

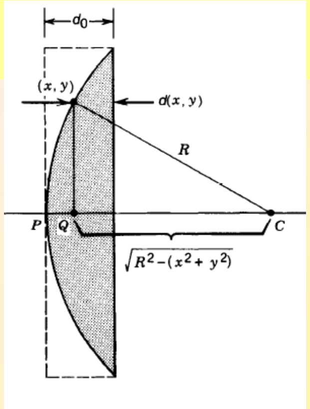
Lente delgada

Função de transmissão em amplitude (FTA) geral

$$t(x,y) = h_0 \exp[-i(n-1)k_0 d(x,y)]$$

Espessura de uma lente *plano-convexa* é

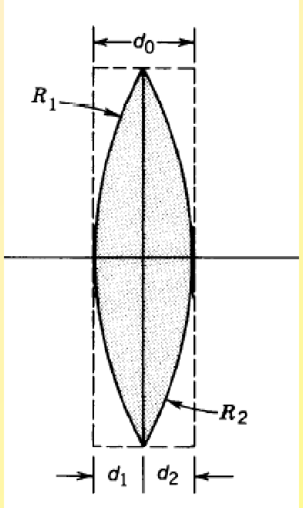
$$\boxed{d(x,y) = d_0 - \left\{R - \left[R^2 - (x^2+y^2)\right]^{1/2}\right\}}$$



Aproximação paraxial (plano-convexa) $x^2+y^2 \ll R^2$ e espessura

$$\left[R^2-(x^2+y^2)\right]^{1/2} = R\left(1-\frac{x^2+y^2}{R^2}\right)^{1/2} \approx R\left(1-\frac{x^2+y^2}{2R^2}\right)$$

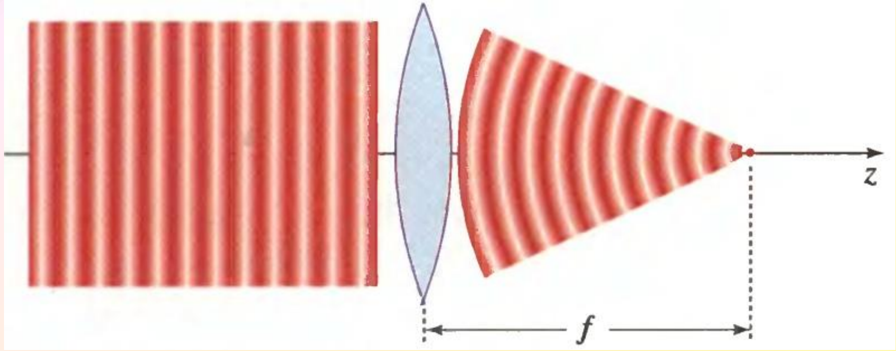
$$\boxed{d(x,y) \approx d_0 - \frac{x^2+y^2}{2R}}$$



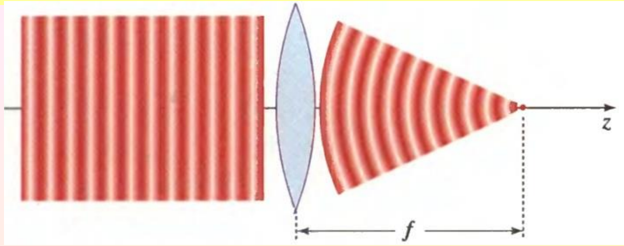
FTA (lente completa) $$\boxed{t(x,y) = h_0 e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2f}}}$$

Com $\boxed{\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}$ (**distância focal** de uma lente delgada)

Uma lente positiva de distância focal **f** transforma ondas planas em ondas paraboloidais convergentes para o foco:



Resolução: critério de Rayleigh



A lente (de raio ρ) difracta a onda incidente:

- Iluminação por onda plana: $U_i(\xi,\eta) = 1$.
- FTA da lente: $t(\xi,\eta) = h_0 e^{-ik\frac{\xi^2+\eta^2}{2f}}.\mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\rho}\right)$
- Campo imediatamente depois da lente (z=0⁺): $U(\xi,\eta) = U_i(\xi,\eta) \times t(\xi,\eta)$
- Propagação para o plano focal da lente (z = f) (condições de Fresnel):

$$U(x,y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ U(\xi,\eta) e^{j\frac{k}{2z}(\xi^2+\eta^2)} \right\} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)}\, d\xi\, d\eta,$$

$$\boxed{U(x,y) = \frac{e^{ikz} e^{-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)}}{i\lambda f} \mathcal{F}\{circ\}_{f_X=\frac{x}{\lambda f},\, f_Y=\frac{y}{\lambda f}}}$$

- Situação normal de formação de imagem num telescópio!

- No plano focal, a irradiância é descrita pelo quadrado do módulo da TF da pupila:
  - Uma estrela → um padrão de Airy
  - Duas estrelas angularmente próximas: dois padrões de Airy, porventura sobrepostos.
- Duas estrelas serão resolvidas se a separação entre os dois padrões de Airy satisfizer, por exemplo, o **critério de Rayleigh**!

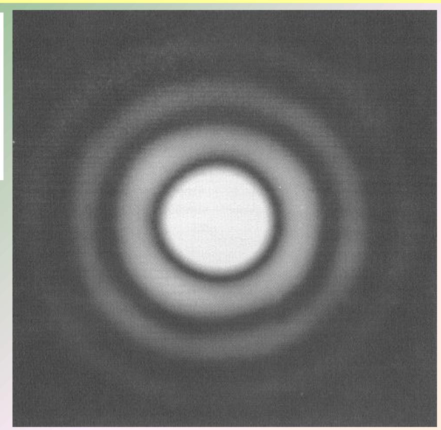
Resolução: critério de Rayleigh

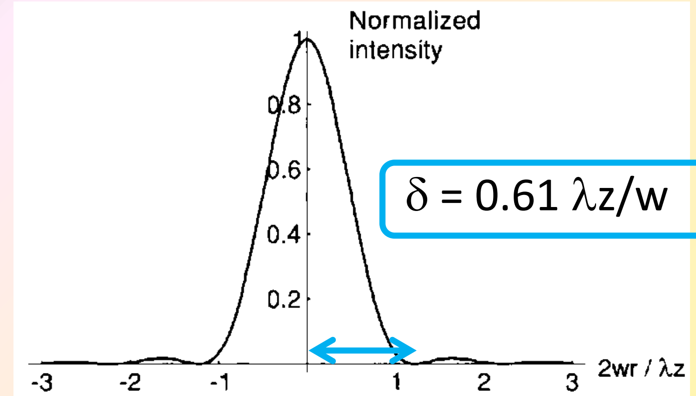
$$I(r) = \left(\frac{A}{\lambda z}\right)^2 \left[2\frac{J_1(kwr/z)}{kwr/z}\right]^2$$

Raio **w**, Diâmetro **D = 2w**

Diâmetro do lobo central:

$$\boxed{d = 1.22\frac{\lambda z}{w}}$$





- **Critério de resolução de Rayleigh**: duas fontes incoerentes podem ser resolvidas por um sistema limitado por difracção e com uma pupila circular quando o centro do padrão de irradiância de Airy de uma coincidir com o primeiro zero do padrão de Airy da outra.

- O 1º zero de J_1 ocorre para $\pi x = 1.22$.

- A separação mínima *radial* no plano imagem (z=f) é metade da largura do lobo central (d) do padrão de Airy:

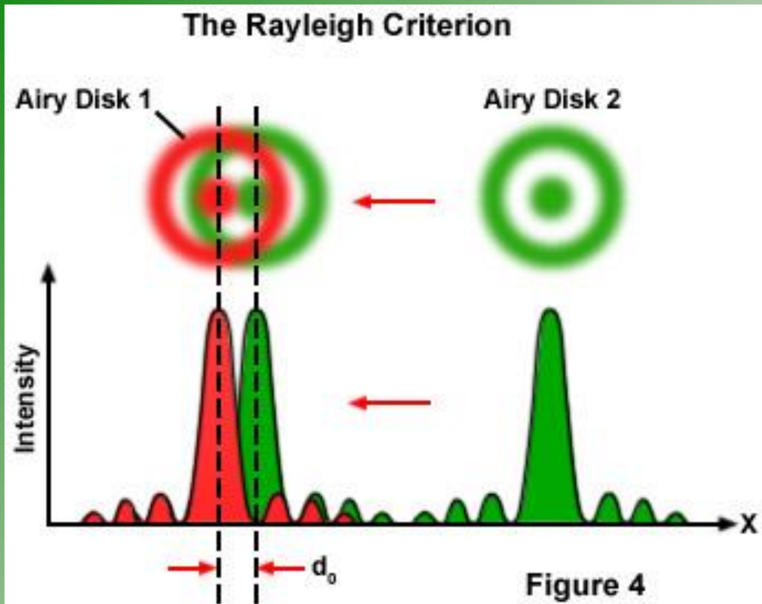
  $d = 0.61\,\lambda f/w \rightarrow 1.22\,\lambda f/D$

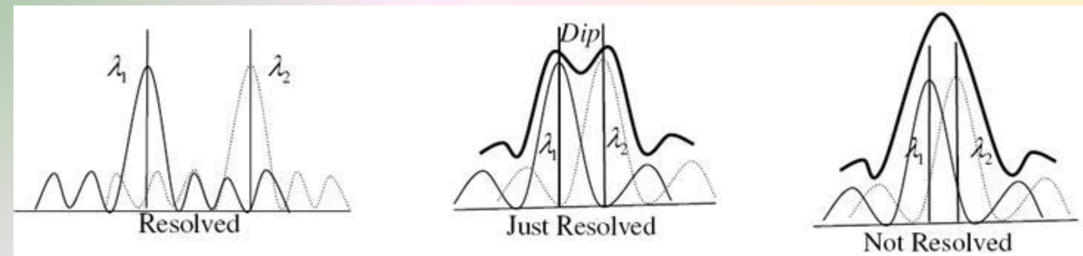
- A separação *angular* (no espaço objecto) será:

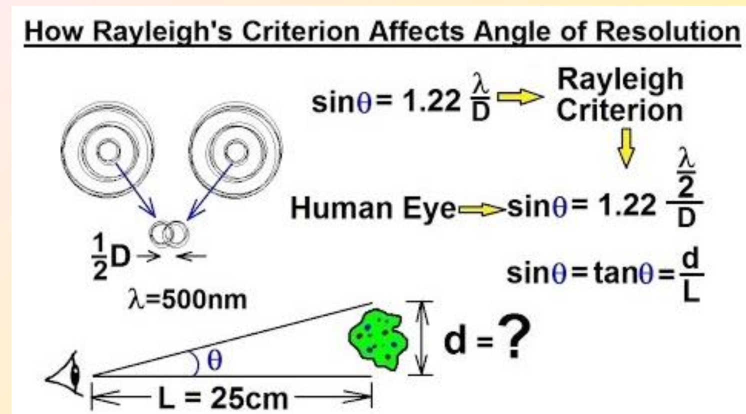
  $\theta = 1.22\,\lambda/D$ (rad)

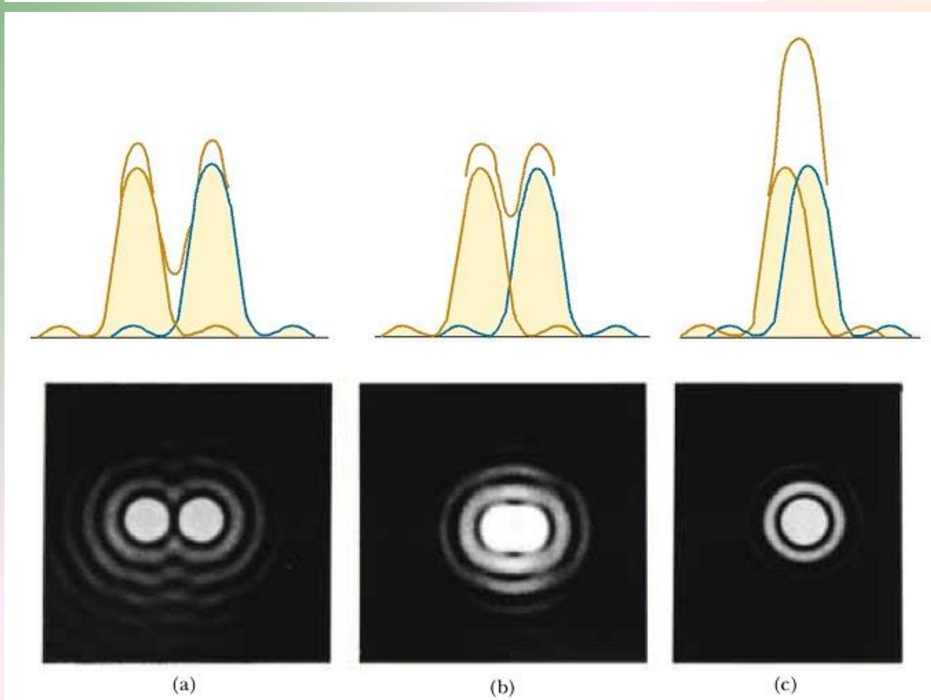
x	$\left[2\frac{J_1(\pi x)}{\pi x}\right]^2$	max, min
0	1	max
1.220	0	min
1.635	0.0175	max
2.233	0	min
2.679	0.0042	max
3.238	0	min
3.699	0.0016	max

Resolution: Rayleigh criterium







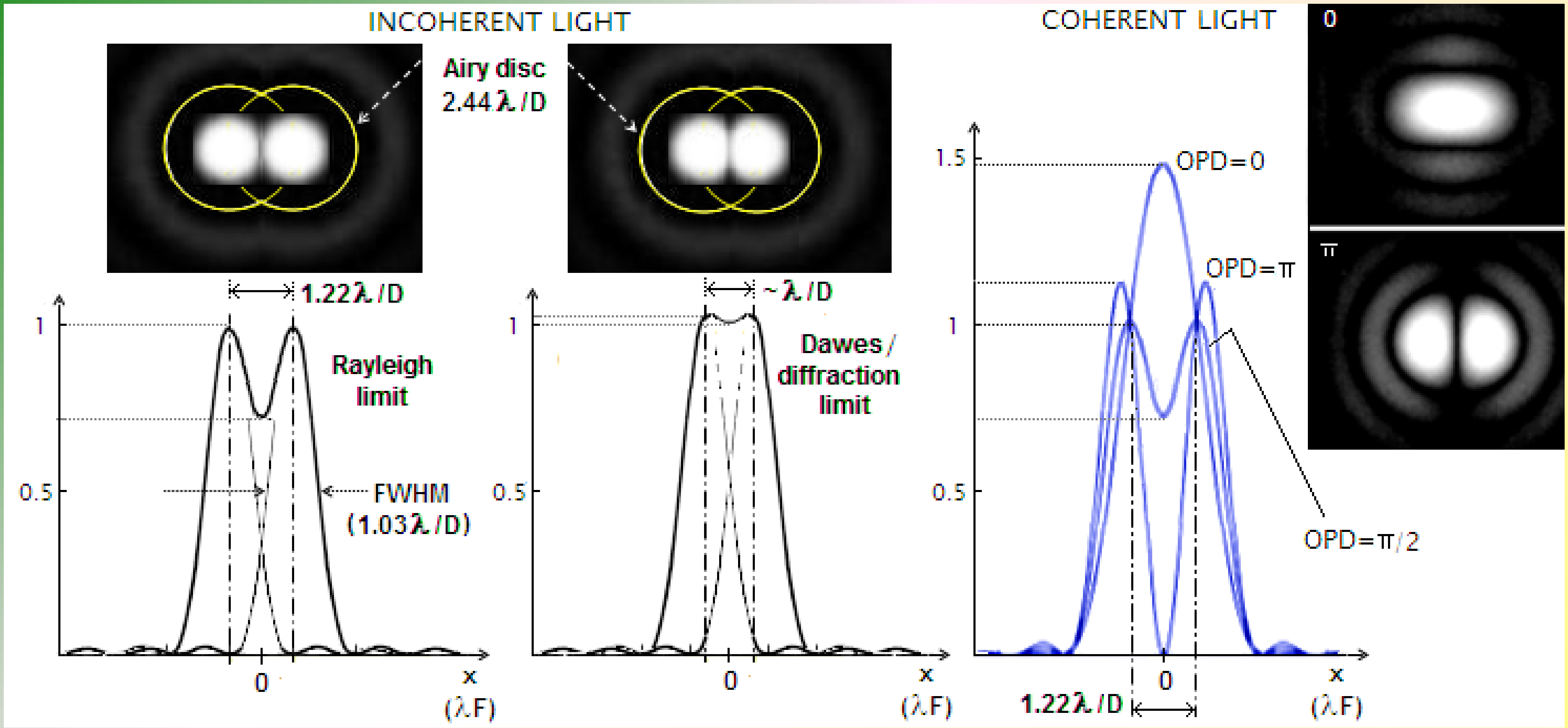


lambda	5,00E-07	m
Diameter	2,00E-03	m
theta	62,911	arc sec
f	0,020	m
dx	6,100	micron

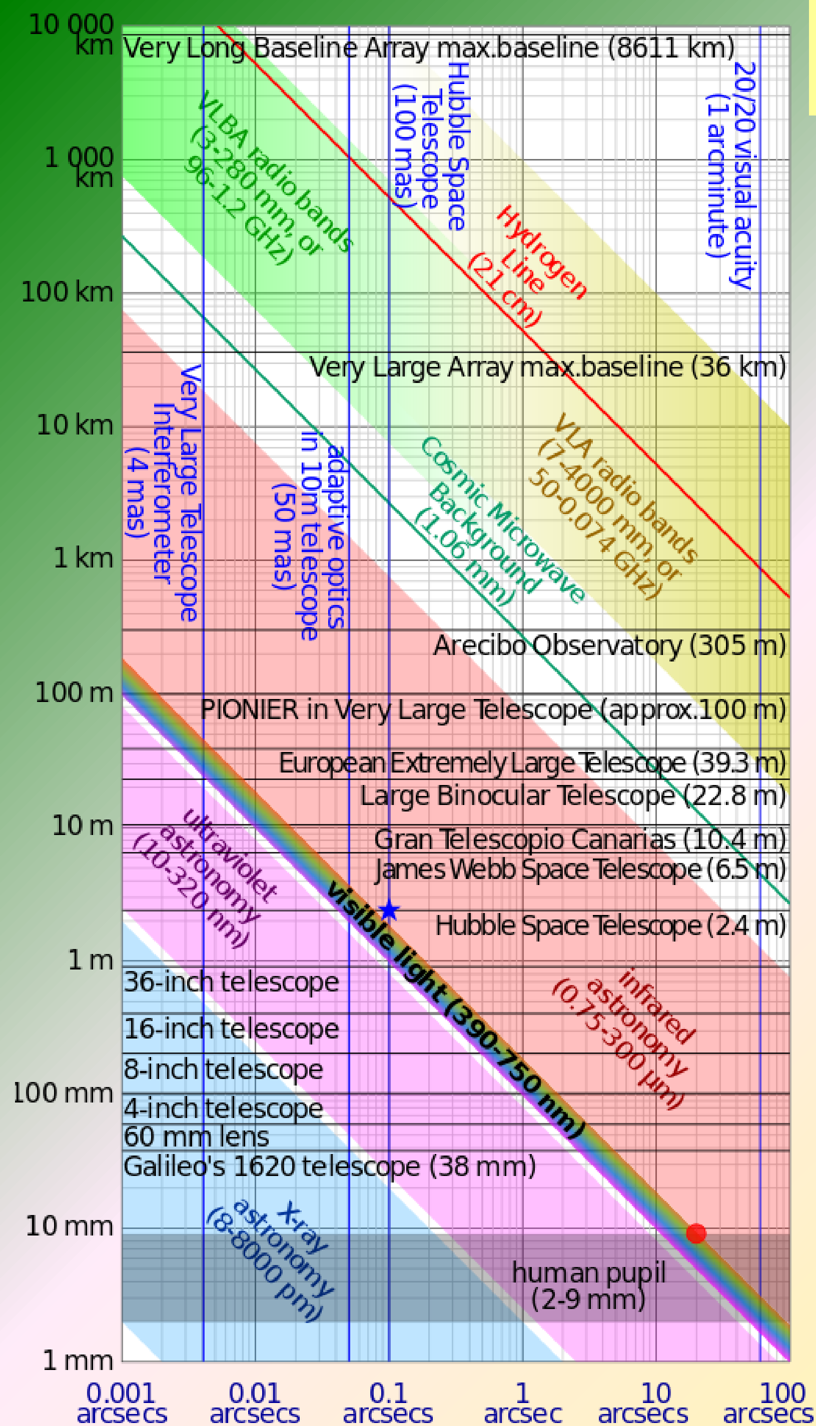
lambda	5,00E-07	m
Diameter	8,00E-03	m
theta	15,728	arc sec
f	0,020	m
dx	1,525	micron

Resolution: coherent and incoherent cases

- .



Resolution: Rayleigh criterium

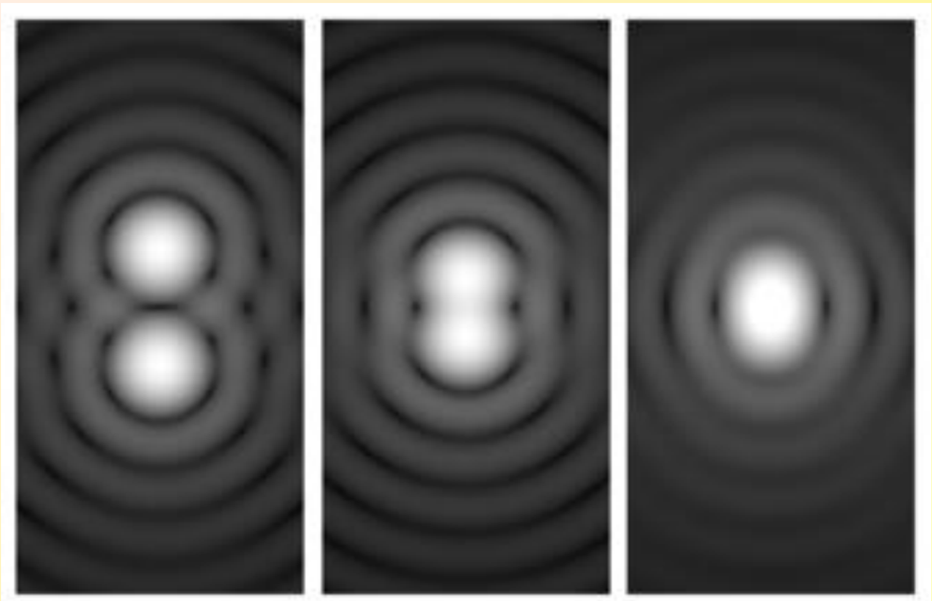


Aperture diameter *vs* **angular resolution** at diffraction limit, for various λ.

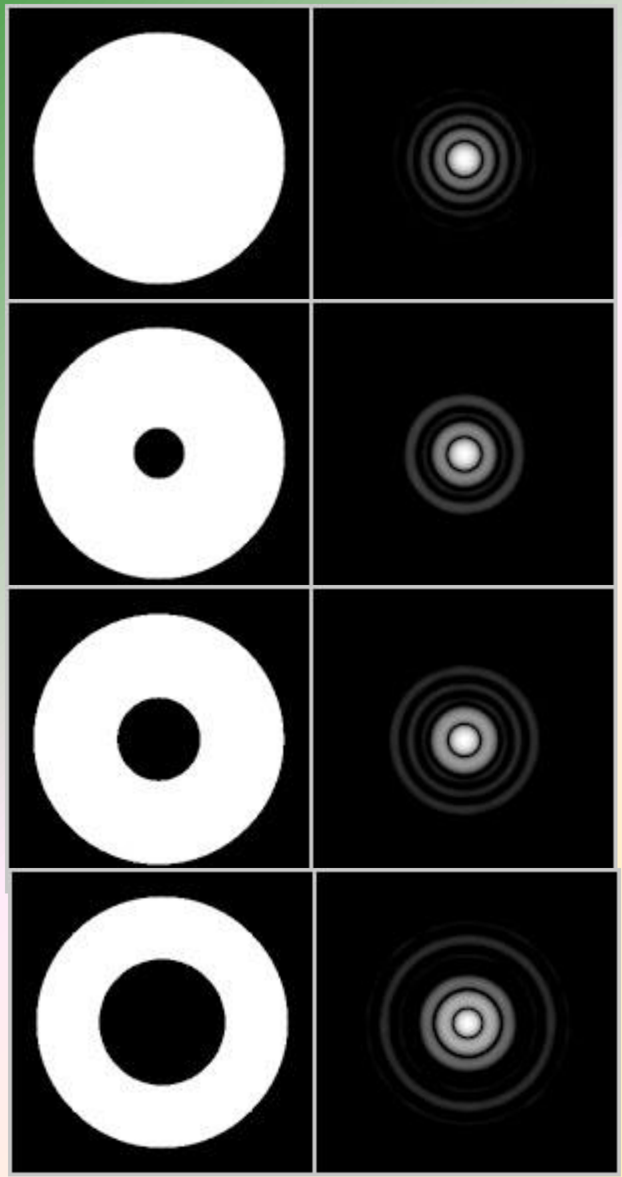
Examples:

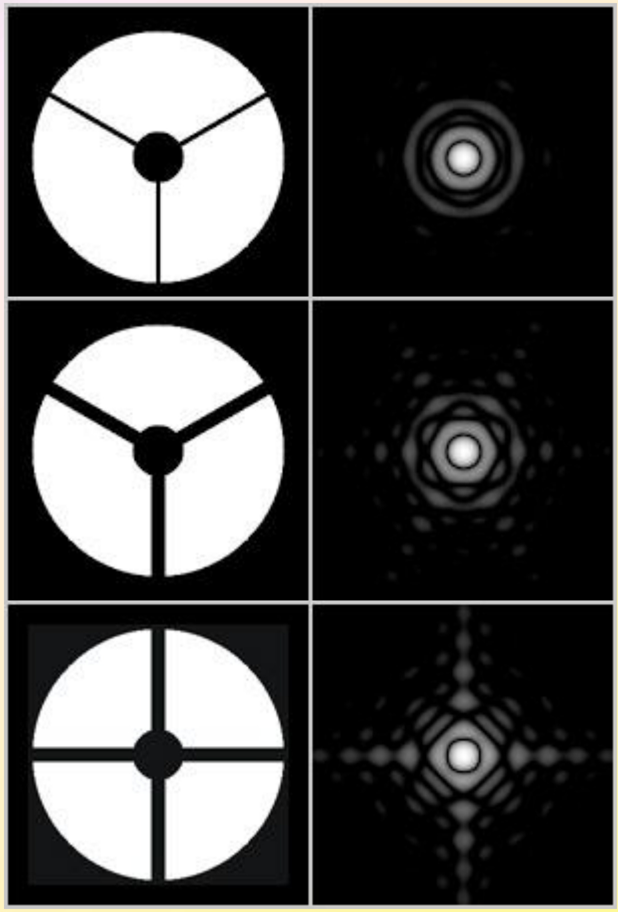
∗ Hubble Space Telescope is almost diffraction-limited in the visible, at **0.1”**

● Human eye should have a resolving power of **20”** in theory (60”, in practice).



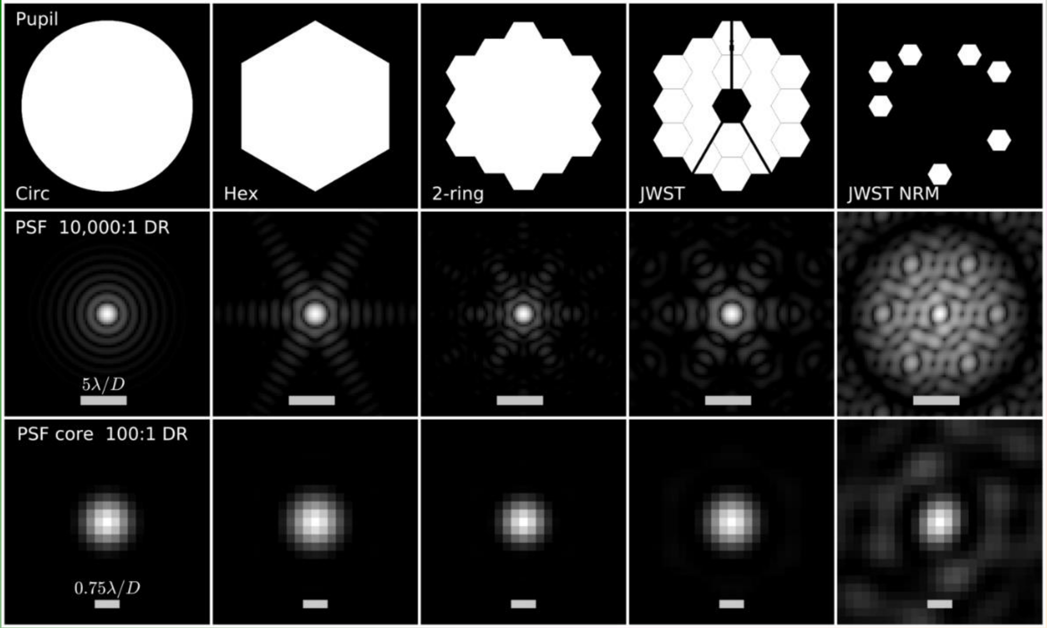
Estrutura da pupila e padrões de difracção (PSF)



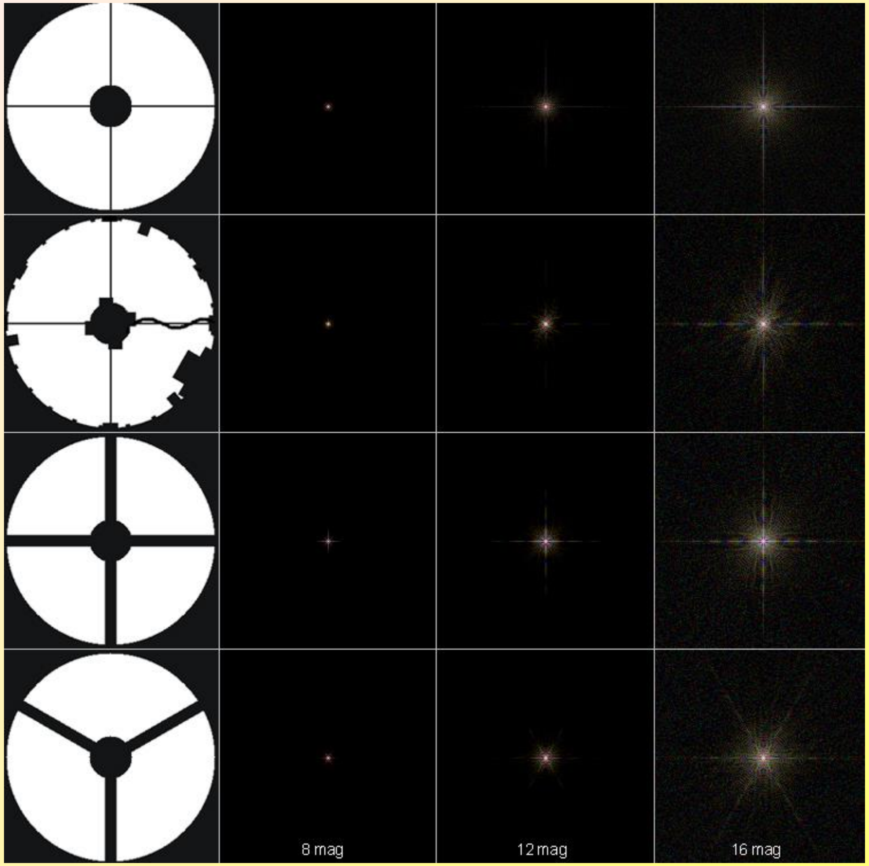


http://www.beugungsbild.de/diffraction/diffraction.html

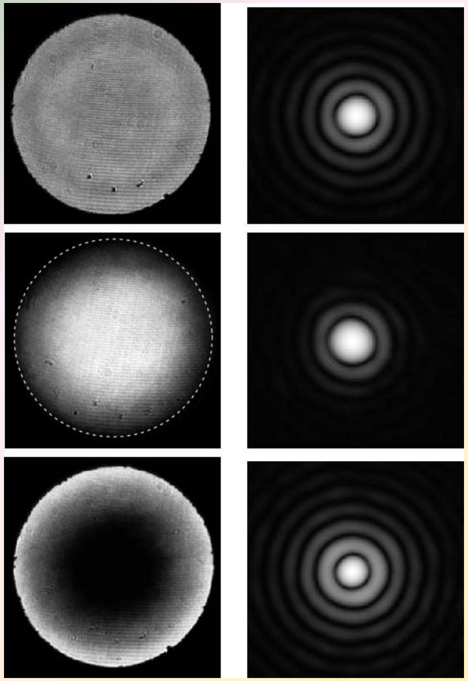
Estrutura da pupila e padrões de difracção (PSF)



http://www.beugungsbild.de/diffraction/diffraction.html



http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0004-637X/783/2/73



https://www.aanda.org/articles/aa/full/2008/49/aa8270-07/aa8270-07.html

Resolução: critério de Rayleigh

Sites & Java Aplets

- http://www.olympusfluoview.com/java/resolution3d/index.html
- http://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/imageformation/rayleighdisks/
- http://www.microscopyu.com/articles/formulas/formulasresolution.html

Propagação, feixes e difracção

Como se **propaga** uma onda electromagnética?

Como se descrevem opticamente objectos e componentes ópticos?

- A - Reflexão e Refracção
  - Espelhos e dioptros planos
- B – Transmissão através de componentes ópticos
  - Lâminas de faces paralelas ou não
  - Lentes
  - Redes de difracção
- C – Componentes de índice variável

Quais os efeitos de componentes ópticos / objectos difractantes sobre ondas?

- Espelhos
- Lâminas
- Lentes
- Prismas
- Redes de difracção
- Objectos 2D / 3D

Feixes e espelhos planos

A soma das duas ondas satisfaz a Eq. Helmoltz. Logo $k_1 = k_2 = k_o$

A imposição das condições fronteira sobre o espelho obriga a que as fases das duas ondas sejam identicas em z=0. Logo:

$$\mathbf{k}_1 . \mathbf{r} = \mathbf{k}_2 . \mathbf{r}$$

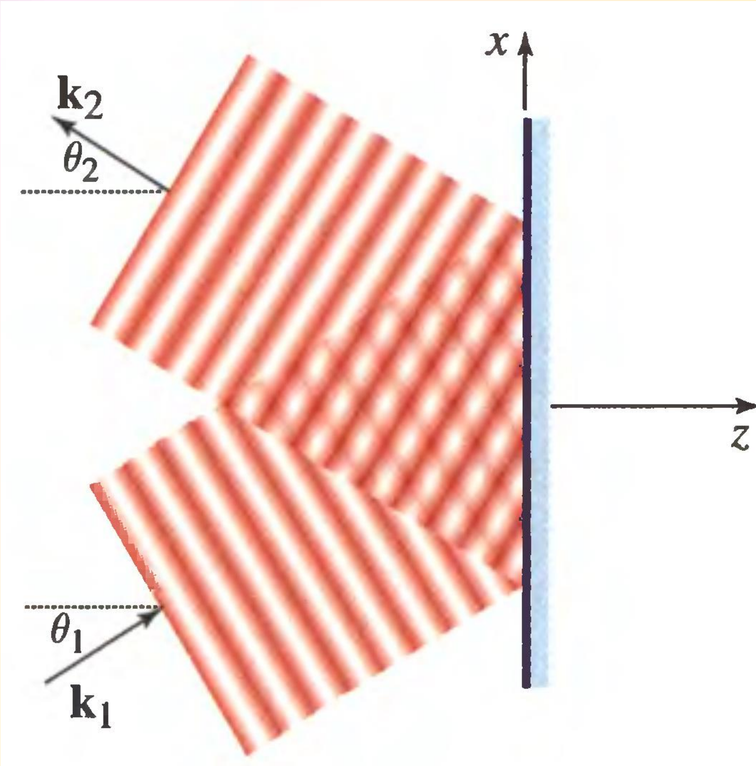
Se

$\mathbf{r} = (x,y,0)$

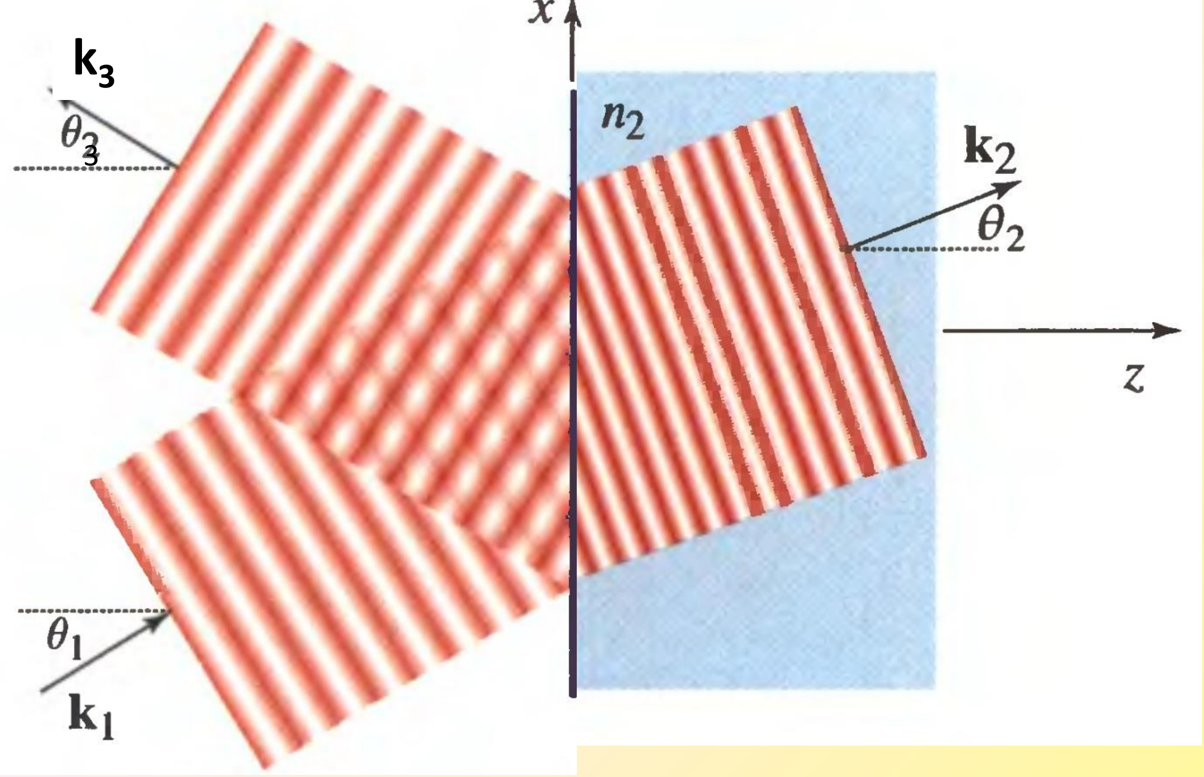
$\mathbf{k}_i = (k_0 \sin\theta_i, 0, k_0 \cos\theta_i), i=1,2$

então

$$\theta_1 = \theta_2$$



Feixes e dioptros planos



→ A soma das três ondas satisfaz a Eq. Helmoltz. Logo:

$k_1 = k_3 = n_1 k_o$

$k_2 = n_2 k_o$

→ A imposição das condições fronteira sobre o espelho obriga a que as fases das três ondas sejam identicas em z=0. Logo:

$$\mathbf{k}_1 . \mathbf{r} = \mathbf{k}_2 . \mathbf{r} = \mathbf{k}_3 . \mathbf{r}$$

Daqui resulta que:

$$\theta_1 = \theta_3$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

As amplitudes das três ondas são determinadas pelas **equações de Fresnel**

Função de transmissão em amplitude

Amplitude ← **amplitude complexa, equação de Helmoltz**

Transmissão ou Reflexão

Objecto: limitado por planos paralelos, normais a ZZ

Amplitude incidente: U (x,y)

Amplitude transmitida: U' (x,y)

Função de transmissão / reflexão em amplitude, t(x,y):

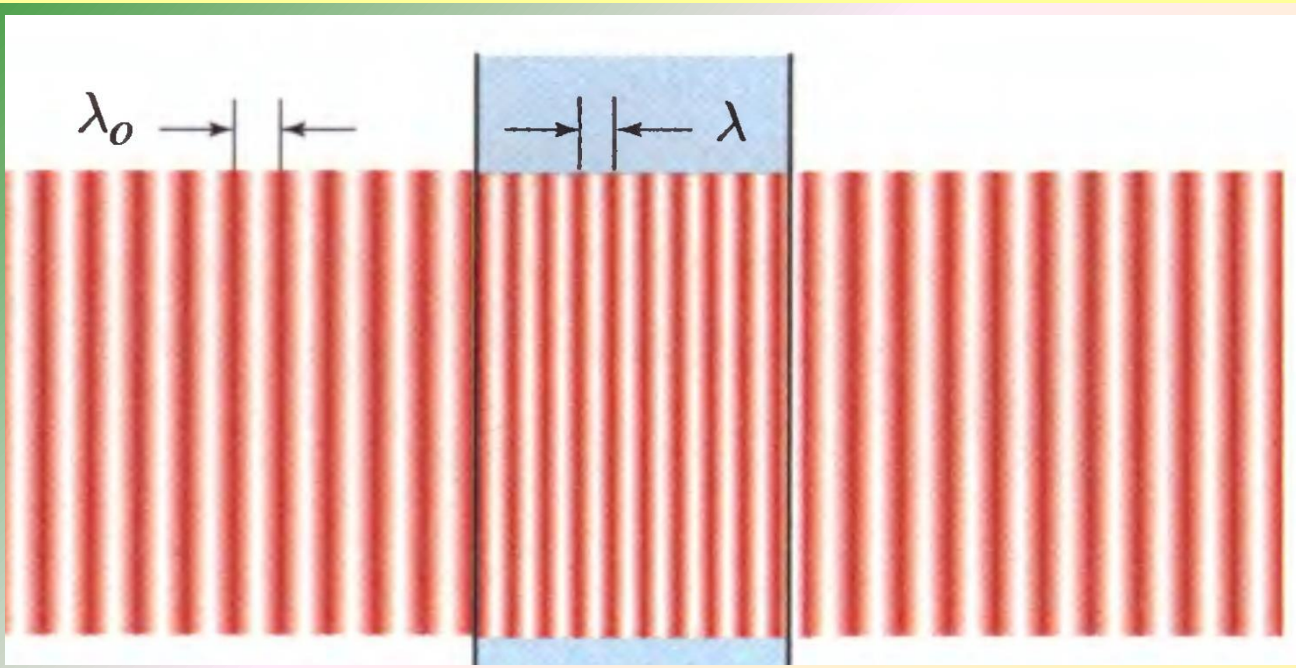
U' (**x,y**) = t(**x,y**) U(**x,y**)

Variação de fase de uma **onda plana** que se propaga de uma distância **d**:

$$e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}} = e^{ik\Delta z} = e^{ikd} = e^{i\Delta\varphi}$$

$$\Delta\varphi = kd = \frac{2\pi}{\lambda}d = 2\pi\frac{d}{\lambda} = 2\pi n\frac{d}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0}nd = nk_0 d$$

Transmissão plana



Amplitude incidente: **U (x,y,0)**

Amplitude transmitida: U (x,y,d)

Função de transmissão em amplitude: t(x,y) = U (x,y,d) / U (x,y,0)

0 < z < d : Onda plana – **$U(x,y,z) = U(x,y,0)\exp(-ink_0 z)$**

A lâmina introduz uma variação de fase de $\Delta\varphi = nk_0 d = 2\pi d/\lambda$

A **função de transmissão em amplitude** é: **$t(x,y) = \exp(-ink_0 d)$**

Elementos transmissivos

Um elemento é limitado pelos planos **z=0** e **z=d_0**.

A espessura **d(x,y)** varia lentamente.

O onda incidente é **paraxial**, os ângulos de incidência são pequenos, o desvio lateral insignificante

A **função de transmissão em amplitude** (FTA) do componente refere-se à estrutura paralepipédica de espessura **d_0**, com índices:

ar – n – ar

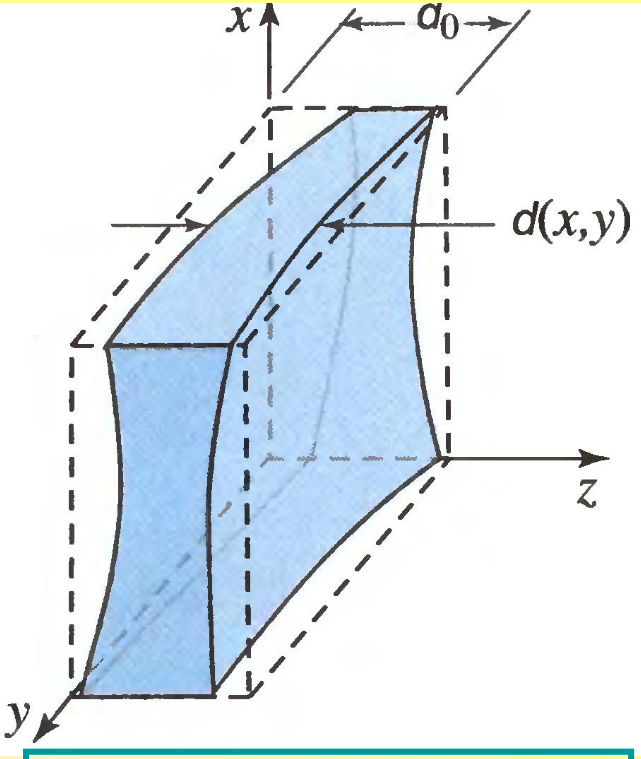
A onda atravessa:

uma espessura **d(x,y)** de **material** (n)

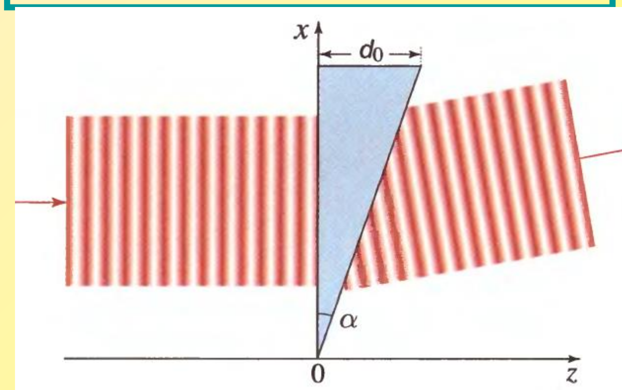
uma espessura **d_0–d(x,y)** de **ar** (1)

$$t(x,y) = h'_0 \ \exp[-ink_0 d(x,y)] \ \ \exp\{-ik_0 [d_0 - d(x,y)]\}$$

$$\mathbf{t(x,y) = h_0 \exp[-i(n-1)\, k_0\, d(x,y)]}$$



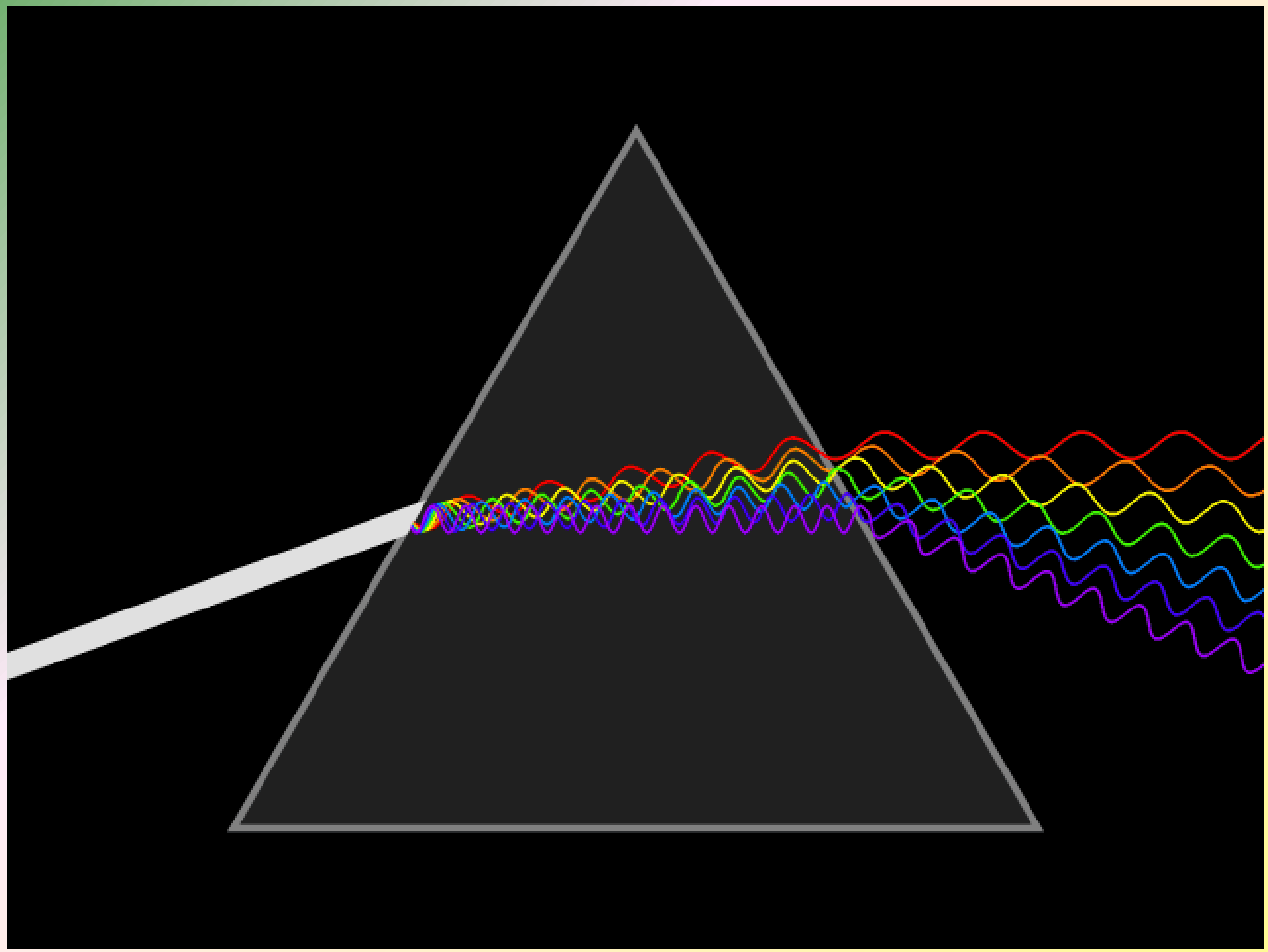
Prismas - Saleh, Problema 2.4-1



$$t(x, y) = h_0 \exp[-j(n-1)k_o \alpha x]$$

Elementos transmissivos: prismas

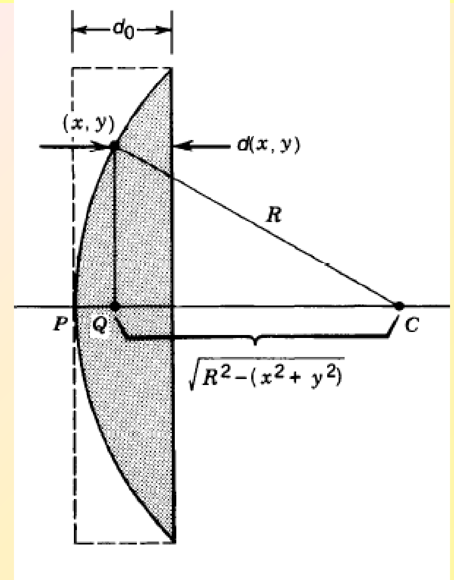
$$t(x,y) = h_0 \exp\{-i[n(\lambda)-1]\, k_0\, d(x,y)\}$$



$$t(x, y) = h_0 \exp[-j(n - 1)k_0 \alpha x]$$

Lentes delgadas

$$\mathbf{t(x,y) = h_0 \exp[-i(n-1)k_0 d(x,y)]}$$



A espessura de uma lente *plano-convexa* é:

$$\boxed{d(x,y) = d_0 - \left\{R - \left[R^2 - (x^2+y^2)\right]^{1/2}\right\}}$$

Se a zona útil for pequena em relação a **R**, $x^2 + y^2 \ll R^2$

$$\left[R^2 - (x^2+y^2)\right]^{1/2} = R\left(1 - \frac{x^2+y^2}{R^2}\right)^{1/2} \approx R\left(1 - \frac{x^2+y^2}{2R^2}\right)$$

Logo

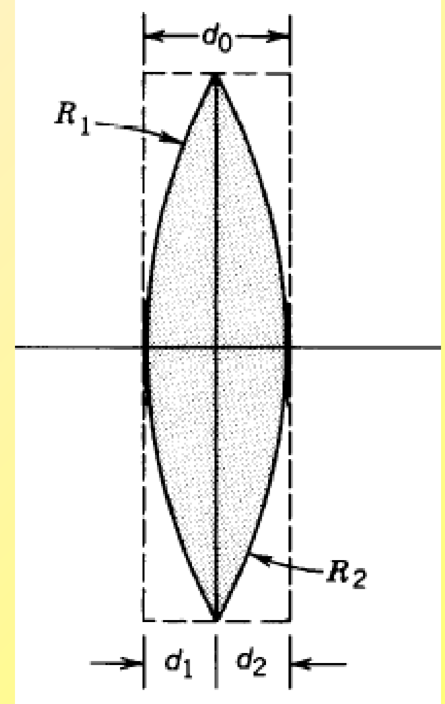
$$\boxed{d(x,y) \approx d_0 - \frac{x^2+y^2}{2R}}$$

A FTA é:

$$\boxed{t(x,y) \approx h_0 \exp\left[jk_o \frac{x^2+y^2}{2f}\right]}$$

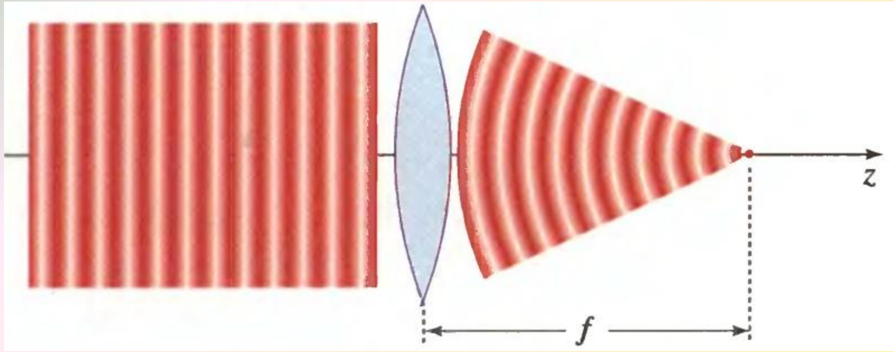
Recupera-se a **distância focal** de uma lente simples:

$$\boxed{f = \frac{R}{n-1}} \qquad \boxed{\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$



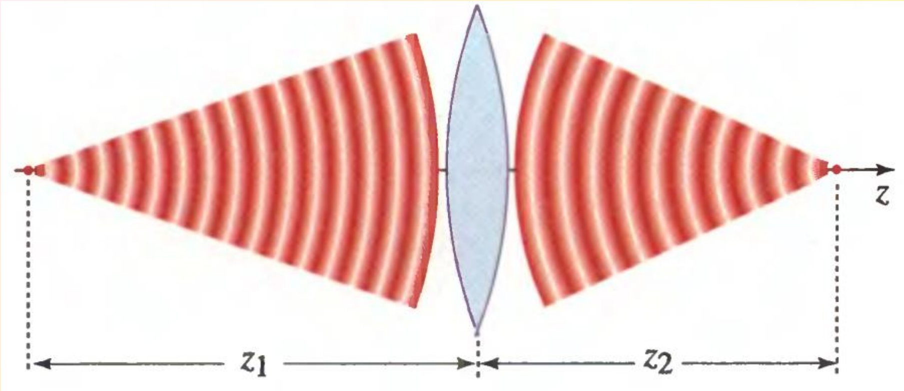
Lentes delgadas

$$t(x,y) \approx h_0 \exp\left[jk_o \frac{x^2+y^2}{2f}\right]$$



Onda esférica / paraboloidal

$$U(\mathbf{r}) \approx \frac{A}{z}\exp(-jkz)\exp\left[-jk\frac{x^2+y^2}{2z}\right]$$



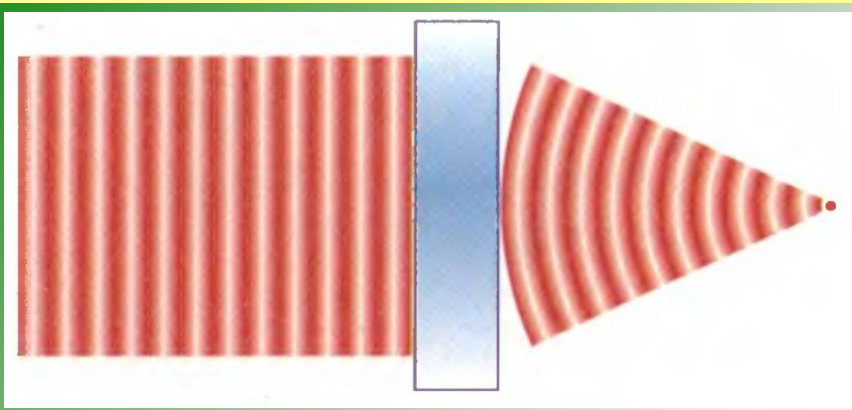
Uma lente positiva de distância focal **f** transforma ondas planas em ondas paraboloidais convergentes para o foco.

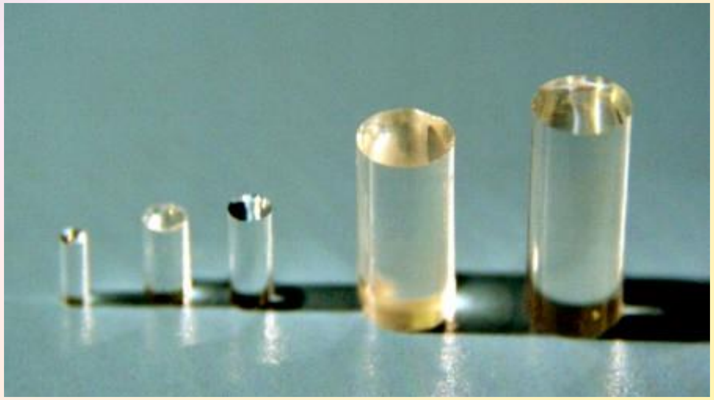
Conjuga planos (formação de imagens),

→transforma uma onda paraboloidal centrada em P_1 (objecto) noutra centrada em P_2,(imagem),

→ satisfaz a **Equação dos Planos Conjugados**: $\mathbf{1/z_1 + 1/z_2 = 1/f}$

Componentes GRIN – Gradient Index





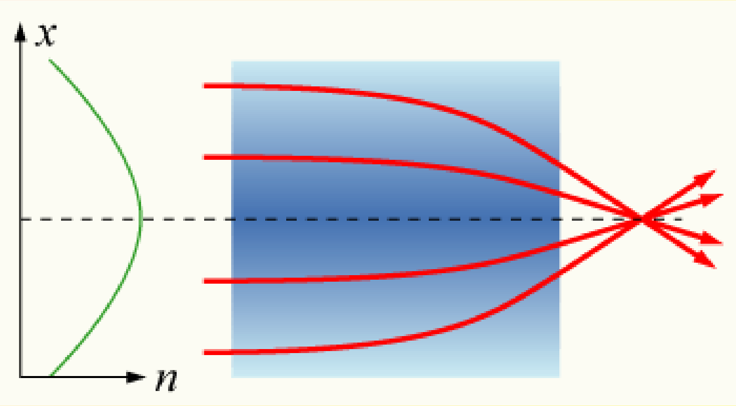
$$t(x,y) = h_0 \exp\left[-i\, n(x,y)\, k_0\, d_0\right]$$

n(x,y) é o perfil de variação do índice de refracção do material

Por exemplo, se $n(x,y) = n_0\left[1 - \frac{1}{2}\alpha^2(x^2 + y^2)\right]$

com $\alpha d_0 << 1$, a lâmina comporta-se como uma lente de distância focal

$$f = \alpha d_0^2 / n_0$$



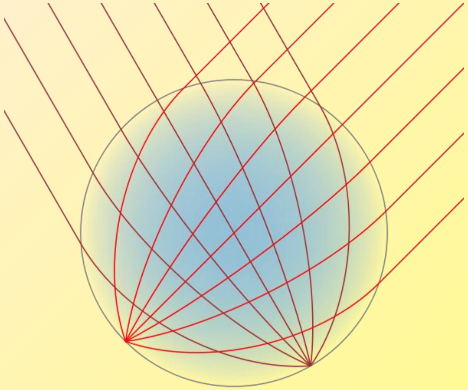
Ópticas GRIN

Lente Olho-de-peixe de Maxwell

$$n = n_0 / [1 + (r/R)^2]$$

A imagem de um ponto sobre a esfera forma-se na posição diametralmente oposta

Lente de Luneburg



$$n = [2 - (r/R)^2]^{1/2}$$

Conjuga duas esferas concêntricas uma na outra

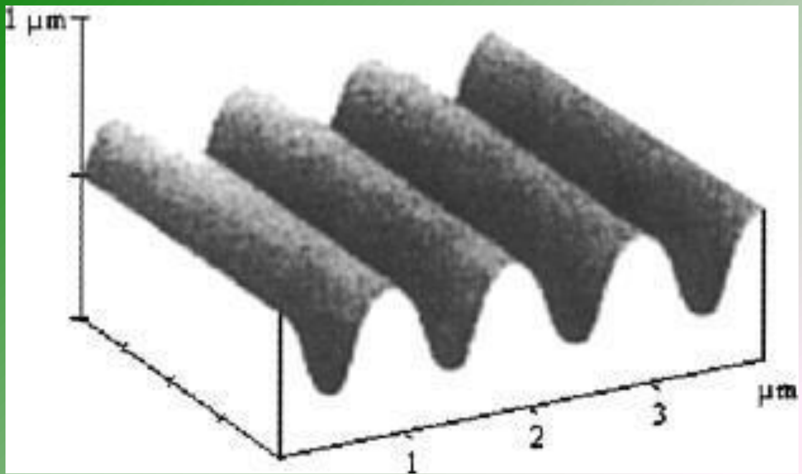
Um feixe colimado é focado na superfície oposta

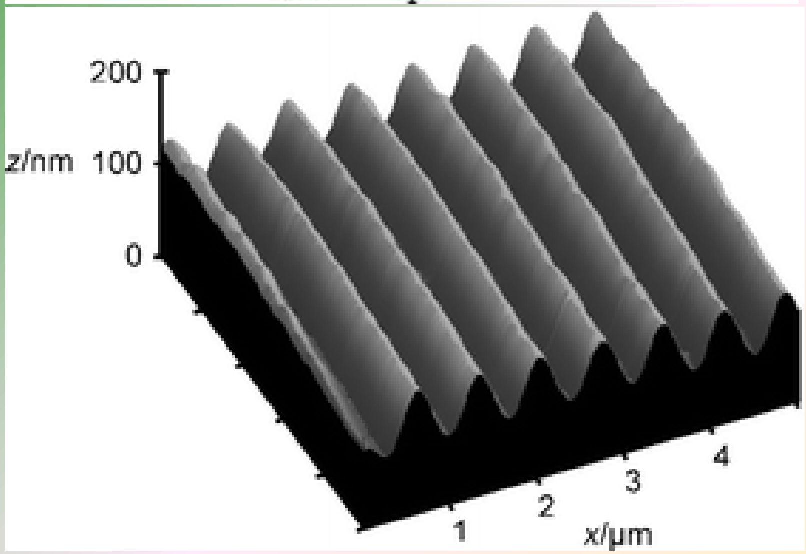
Cristalino ocular

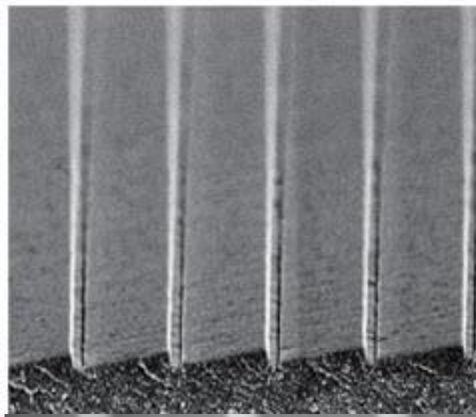
n : 1.406 (camadas centrais) → 1.386

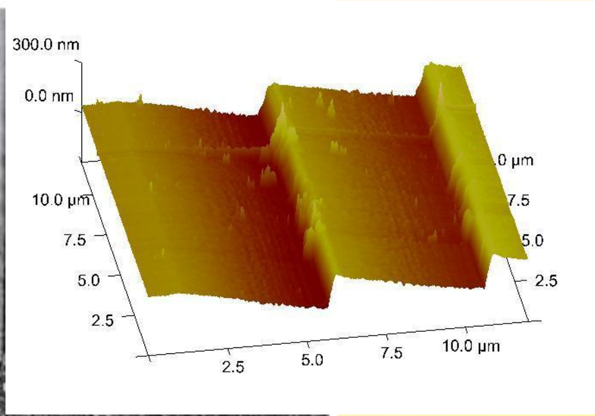
+ Miragens. Lentes gravitacionais. Microondas na atmosfera. ...

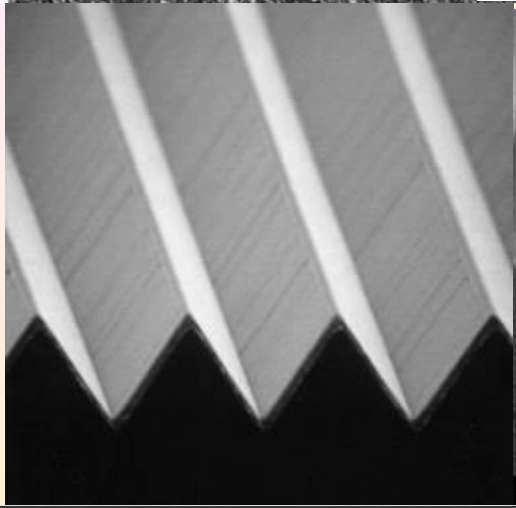
Redes de difracção de fase

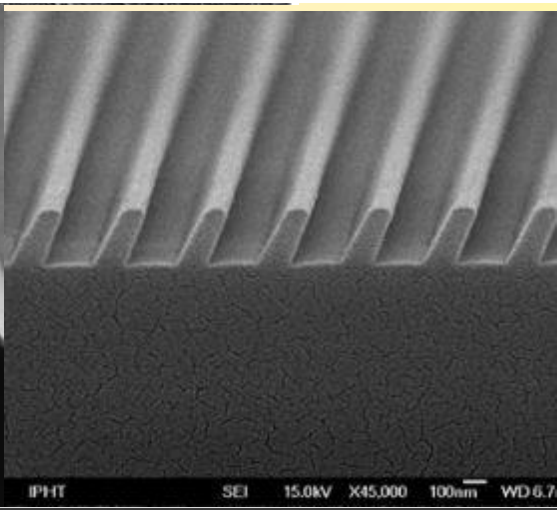


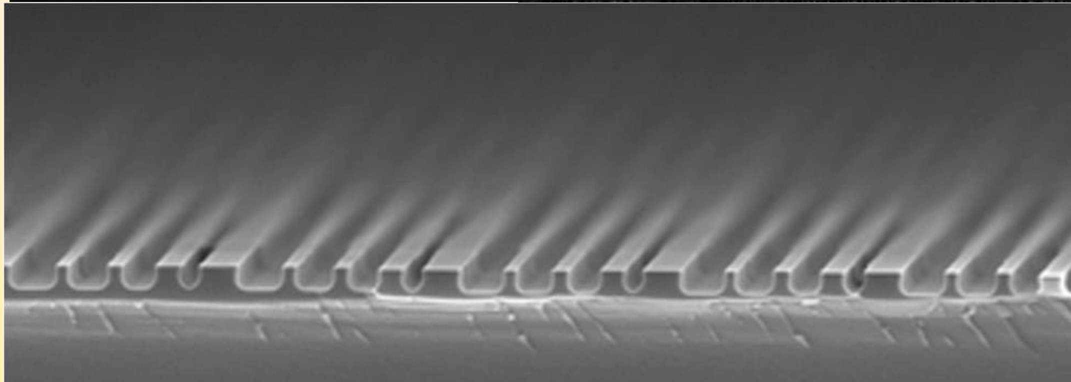




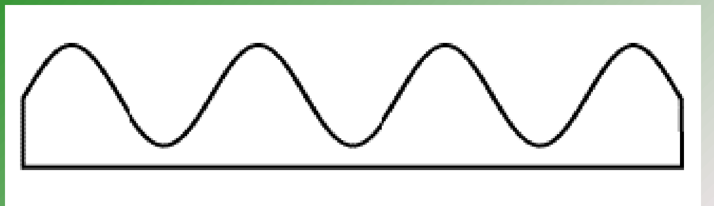


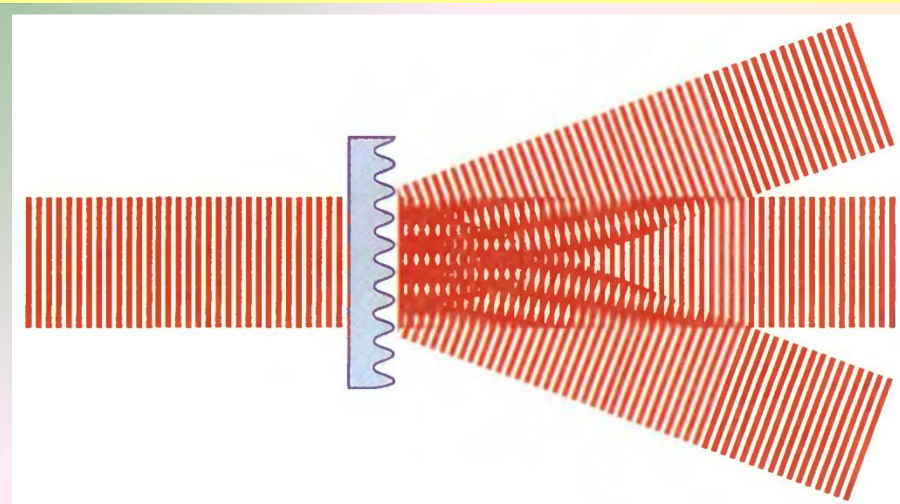






Redes de difracção de fase





$$t(x,y) = h_0 \exp[-i(n-1)k_0 d(x,y)]$$

Se

$$d(x,y) = \tfrac{1}{2} d_0 [1 + \cos(2\pi x / \Lambda)]$$

$$t(x,y) = h_0 \exp[-j \tfrac{1}{2}(n - 1) k_o d_0 \cos(2\pi x / \Lambda)]$$

$$\exp\left[j \frac{m}{2} \sin(2\pi f_0 \xi)\right] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{m}{2}\right) \exp(j 2\pi q f_0 \xi)$$

Redes de difracção

$$t(x,y) = h_0(x,y)\,\exp[-i(n-1)k_0 d(x,y)]$$

d(x,y) e **h_0(x,y):** funções **reais**, **periódicas**, de período Λ.

As redes de difracção podem ser:

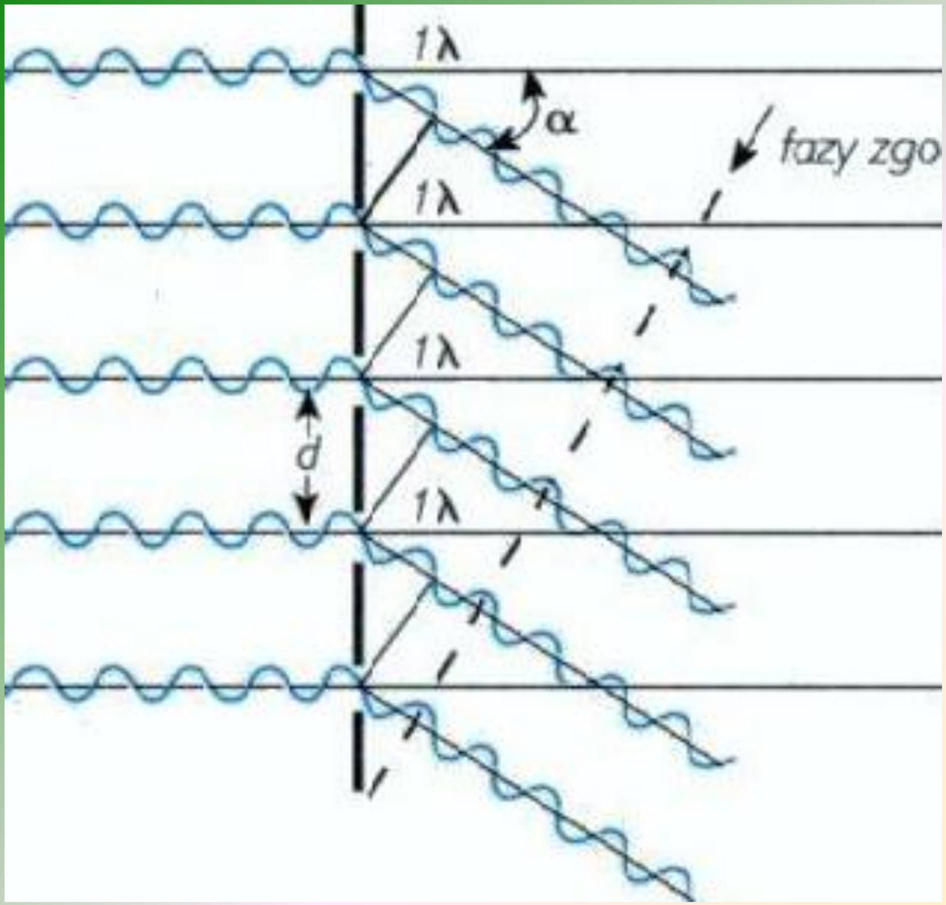
de **amplitude:** **d(x,y) = constante**

de **fase**: **h_0(x,y) = constante**

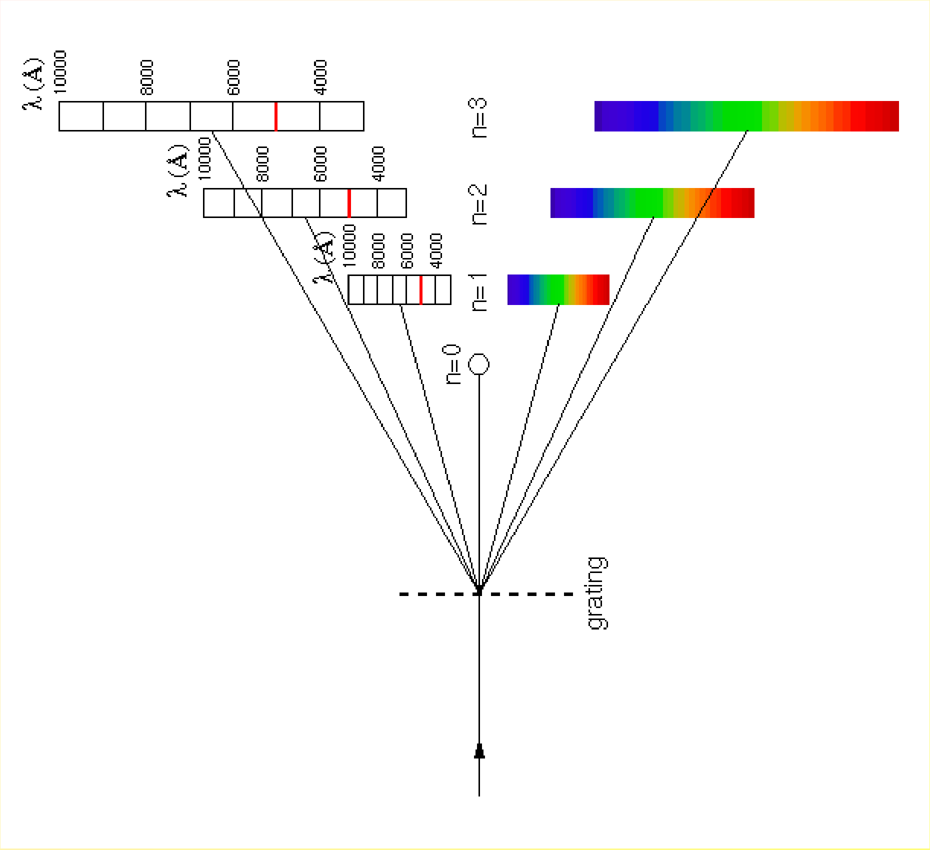
No caso de redes de amplitude, uma onda **plana** incidente segundo θ_i, é difractada em várias ordens que se propagam segundo ângulos θ_q, e:

$$\boxed{\sin\theta_q = \sin\theta_i + q\frac{\lambda}{\Lambda}}$$

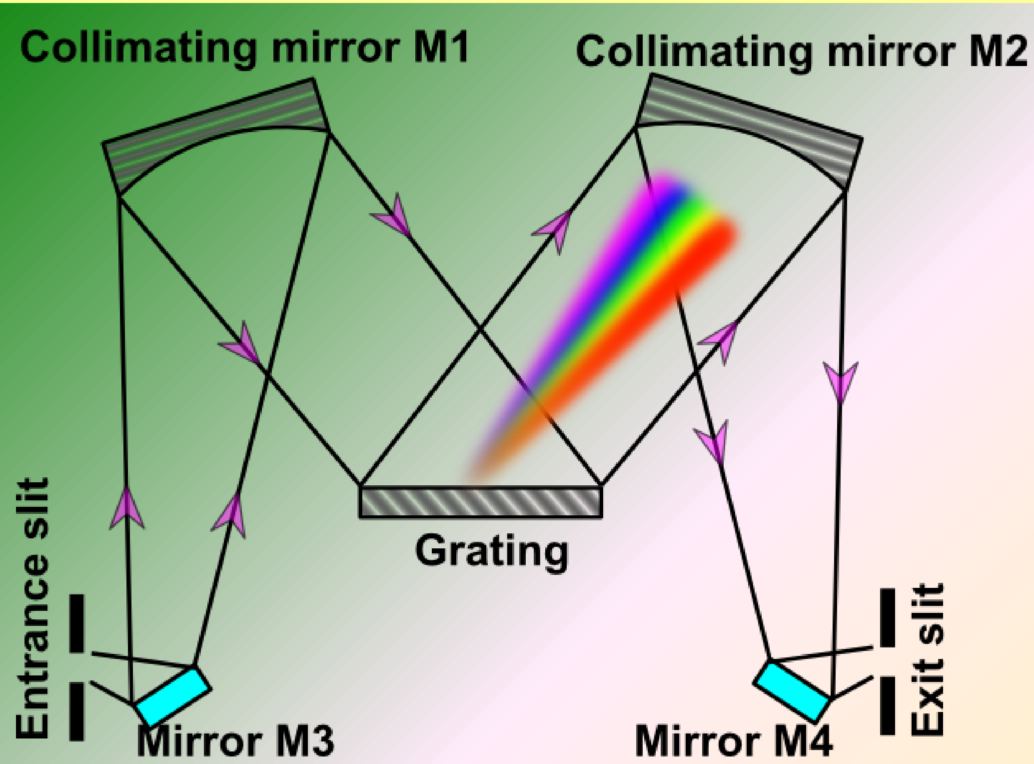
Redes de difracção

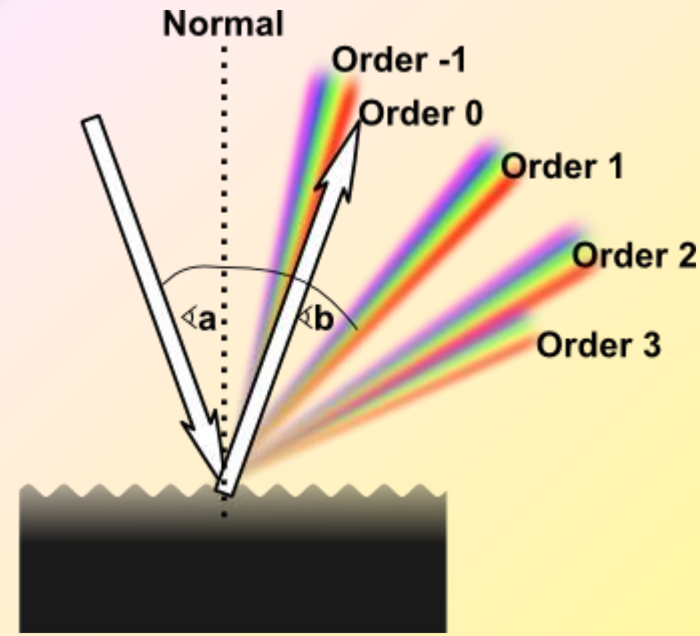


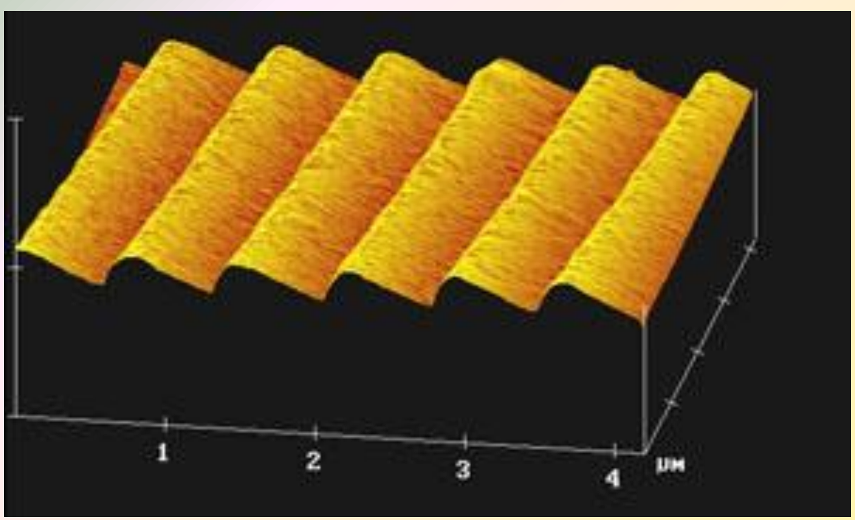
$$\sin\theta_q = \sin\theta_i + q\frac{\lambda}{\Lambda}$$

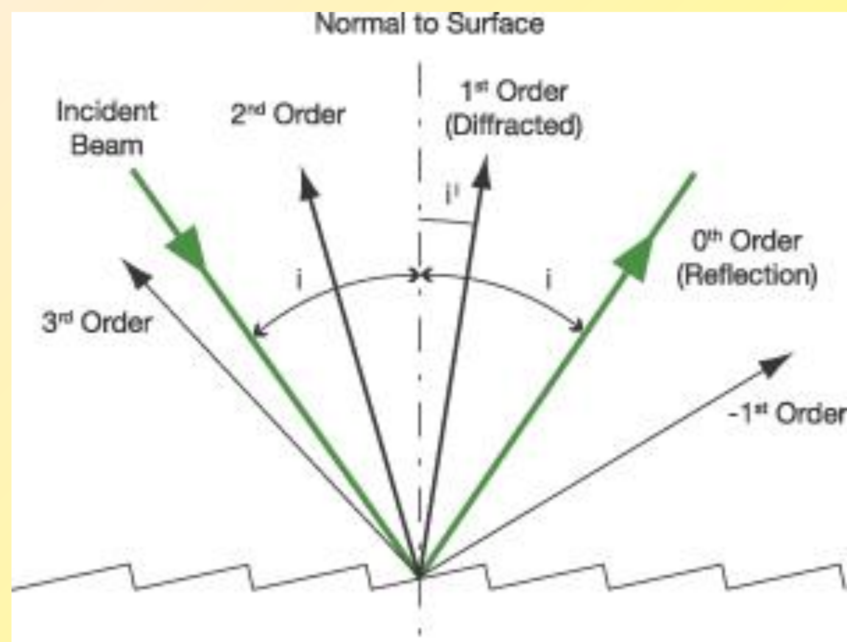


Redes de difracção de fase - espectrómetros

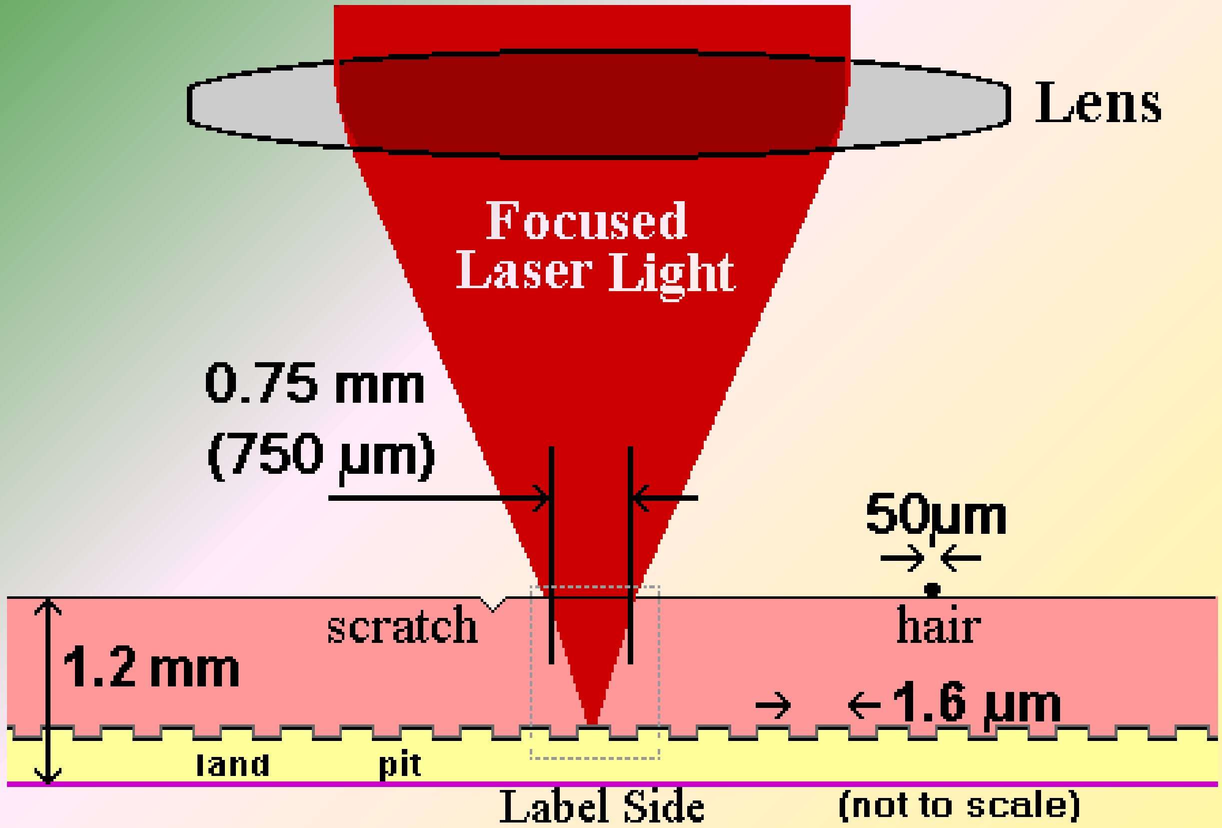


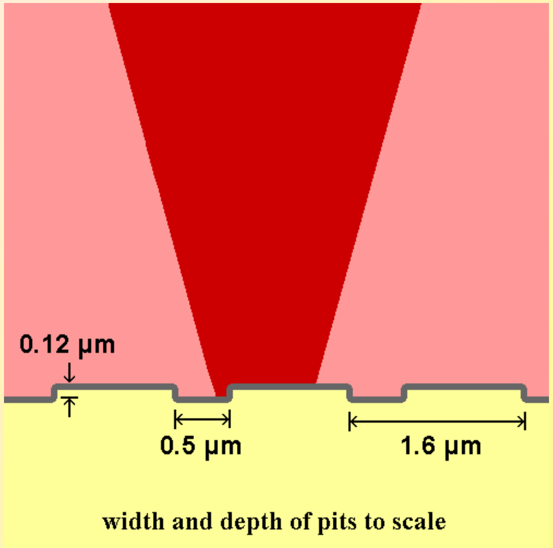




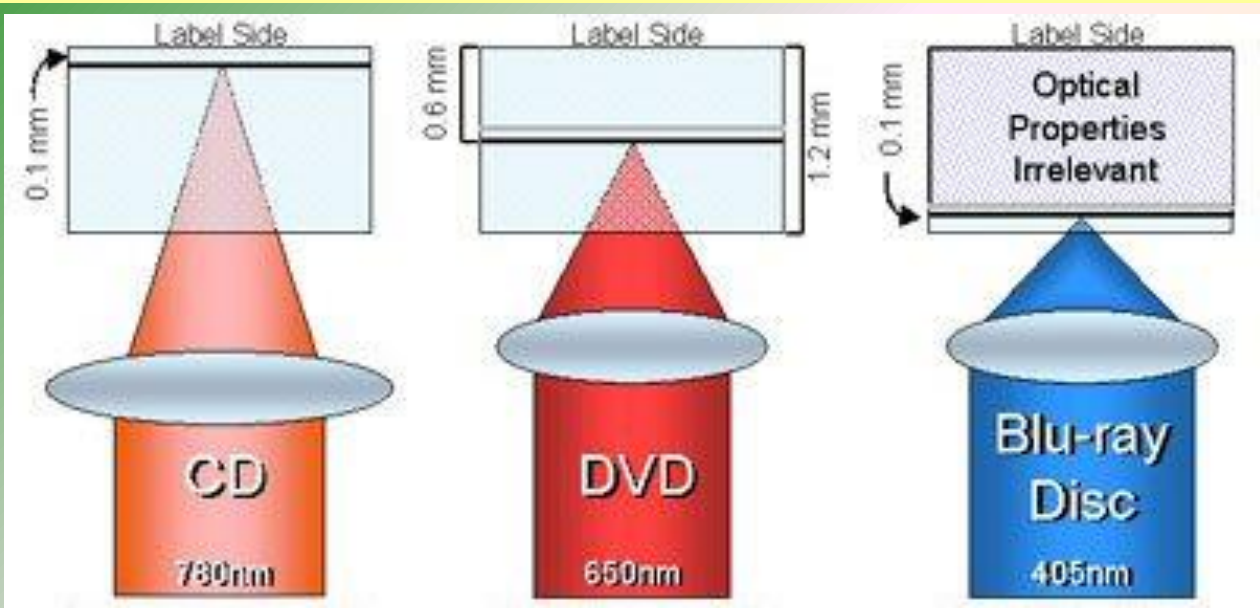


Feixes e redes de difracção: CD & DVD

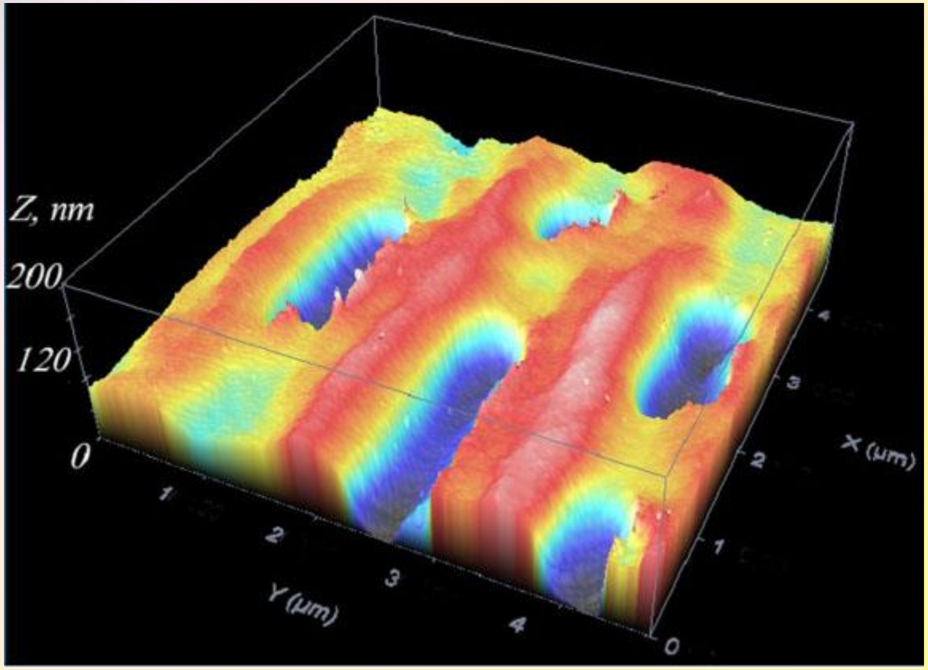




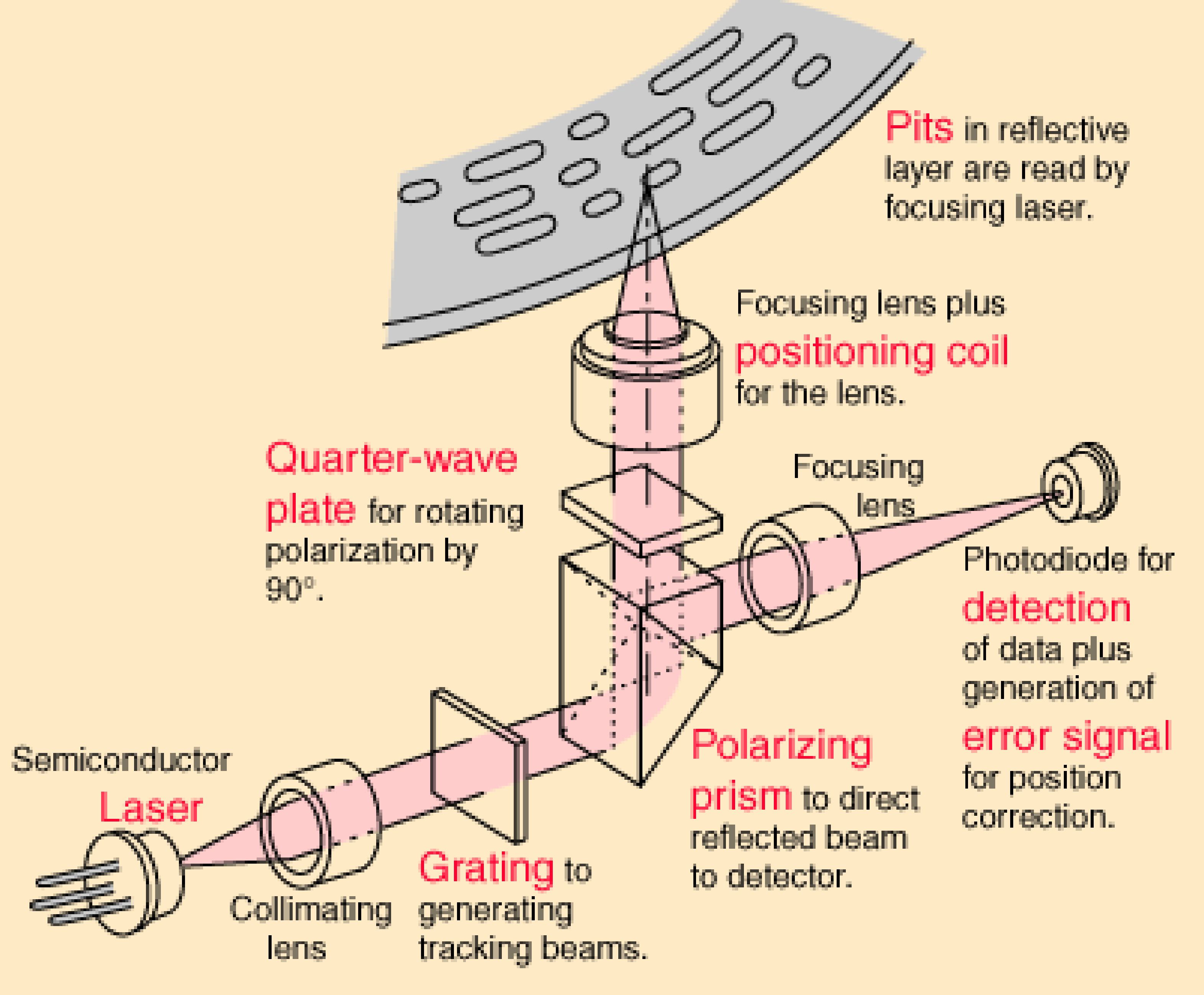
Feixes e redes de difracção: CD & DVD



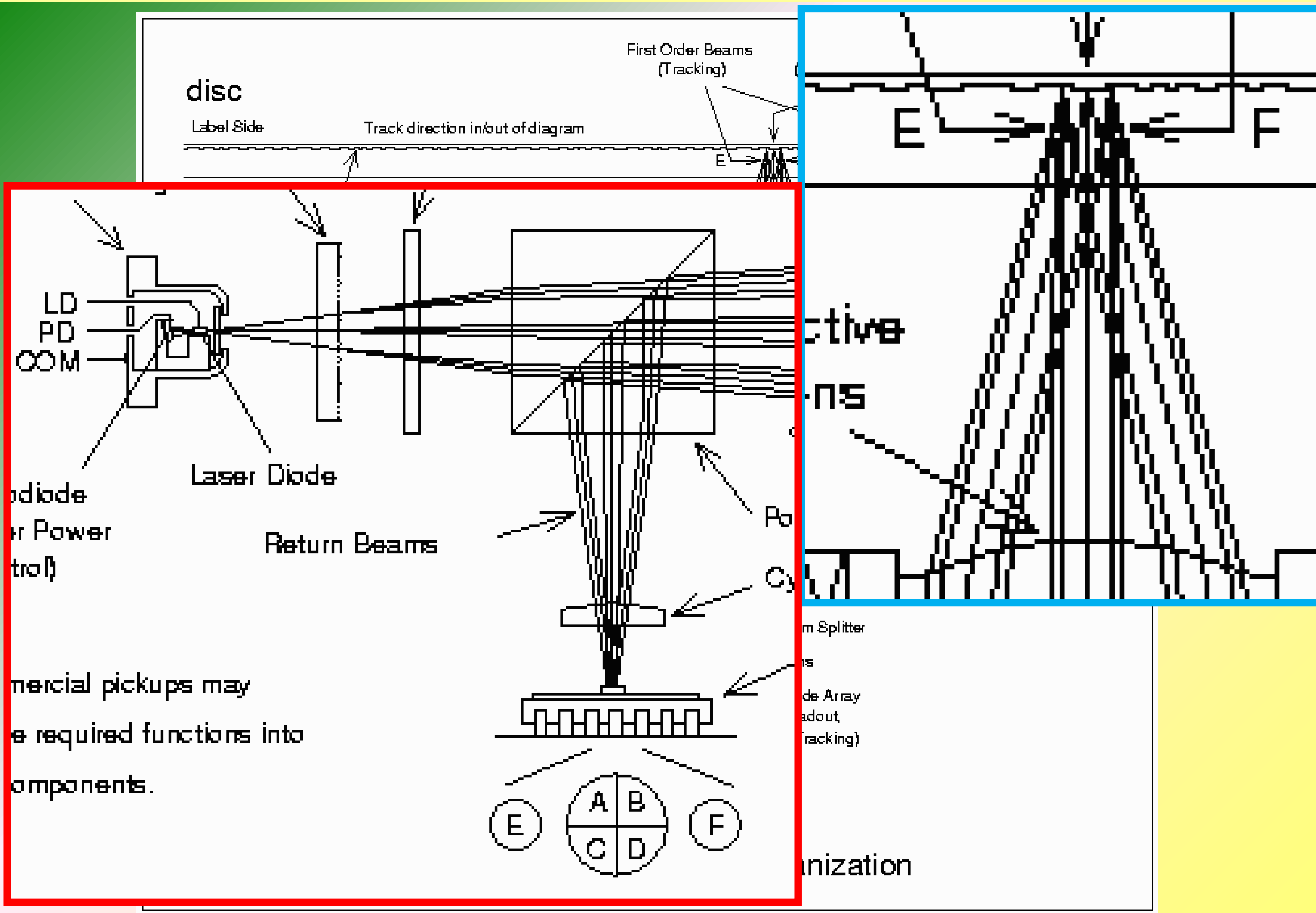
Feixes e redes de difracção: CD & DVD



Redes de difracção: CD & DVD



Redes de difracção: CD & DVD



Acção de lentes sobre feixes gaussianos

Como é que uma lente transforma feixes gaussianos?

$$U(\mathbf{r}) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp\left[-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right] \exp\left[-jkz - jk\frac{\rho^2}{2R(z)} + j\zeta(z)\right]$$

$$W(z) = W_0\left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$R(z) = z\left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right]$$

$$\zeta(z) = \tan^{-1}\frac{z}{z_0}$$

$$W_0 = \left(\frac{\lambda z_0}{\pi}\right)^{1/2}$$

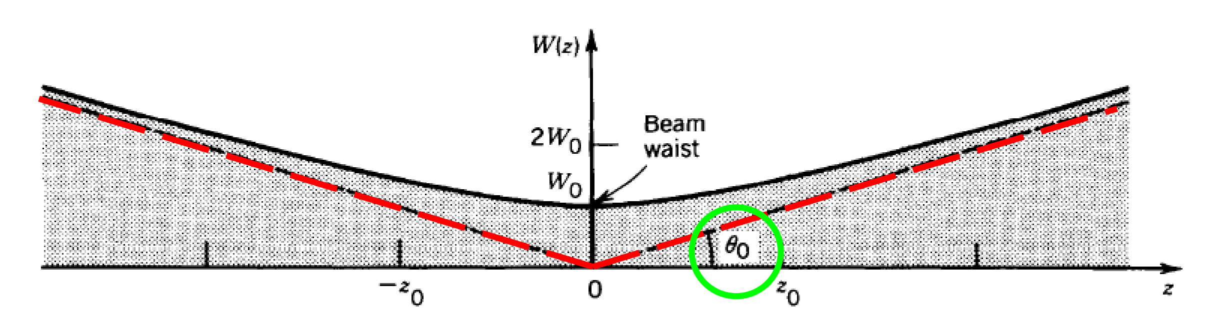
$$A_0 = A_1/jz_0$$

$$\theta_0 = \frac{\lambda}{\pi W_0} = W_0/z_0$$

$$2z_0 = \frac{2\pi W_0^2}{\lambda}$$

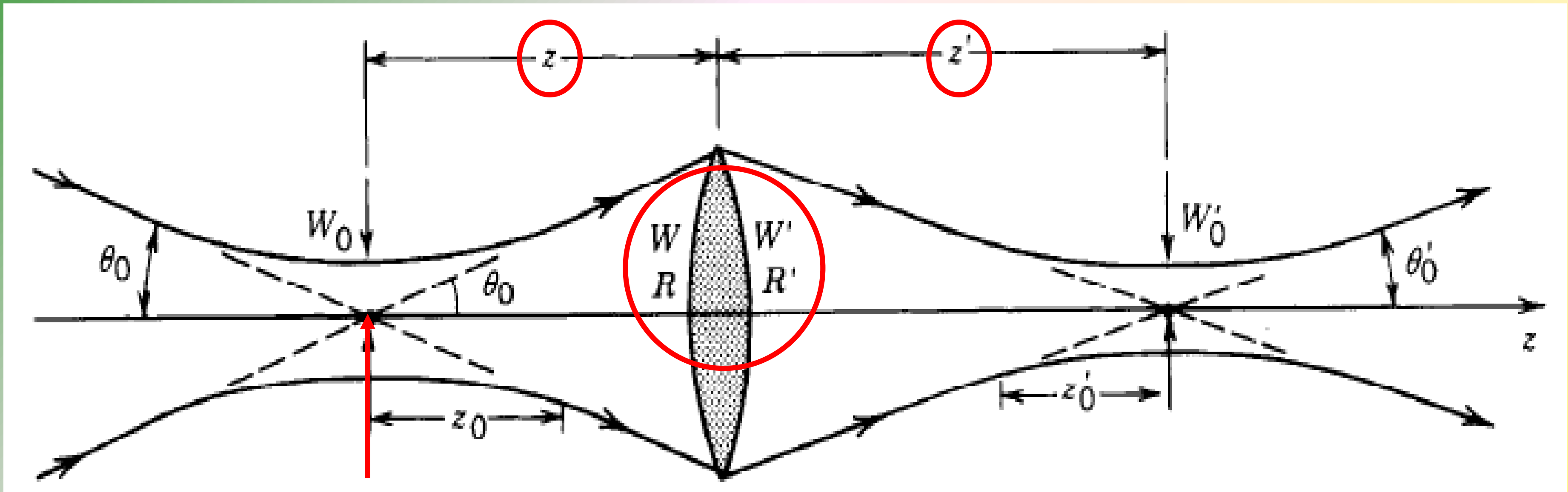
Parâmetros independentes: A_0, z_0, λ.

$$W(z) \approx \frac{W_0}{z_0} z = \theta_0 z$$



Acção de lentes sobre feixes

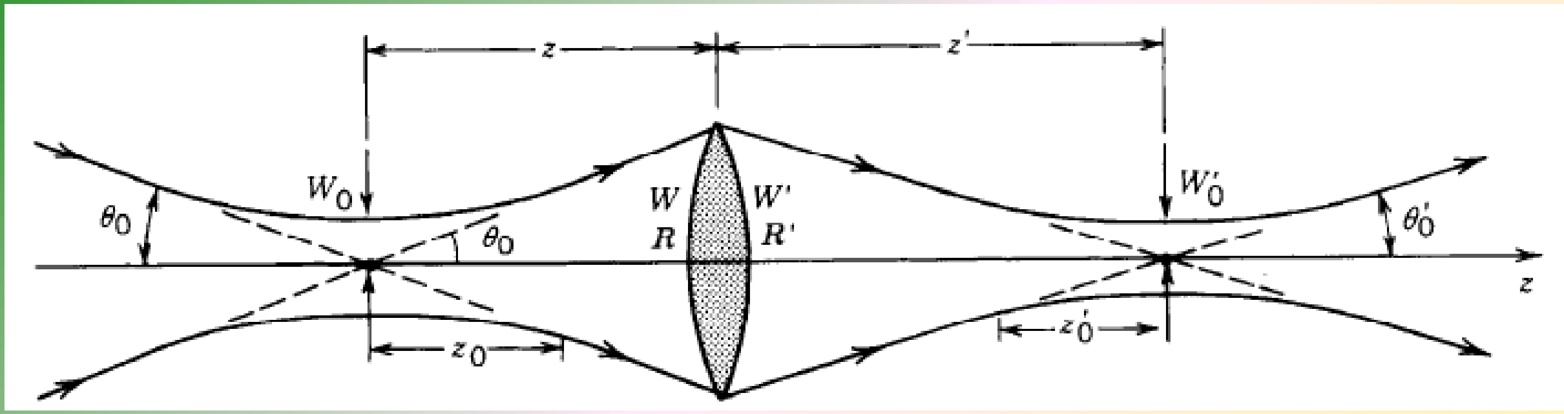
Um feixe Gaussiano permanece Gaussiano quando é transmitido por uma lente delgada? Quais os seus novos parâmetros?



A FTA de uma lente delgada é **$t(\rho)=\exp[jk\rho^2/2f]$.**

A amplitude complexa $U(\mathbf{r})$ da onda incidente é multiplicada por $t(\rho)$.

Acção de lentes sobre feixes



Relação entre as **fases** antes e depois da lente:

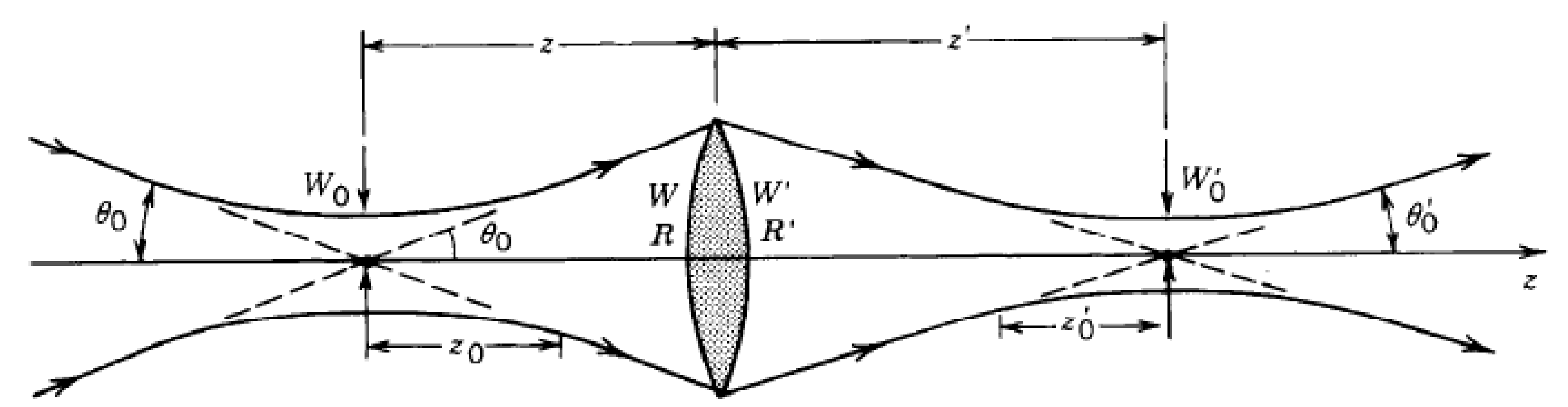
$$kz + k\frac{\rho^2}{2R} - \zeta + k\frac{\rho^2}{2f} = kz + k\frac{\rho^2}{2R'} - \zeta$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{f}$$

O feixe transmitido é gaussiano, com $\phi' = \phi$ mas com a função curvatura R'.

Os demais parâmetros do feixe transmitido podem ser determinados a partir de W e de R num dado ponto (Exercício Saleh, 3.1-3):

Acção de lentes sobre feixes



Parâmetros do feixe gaussiano transmitido:

Waist radius $\quad W_0' = M W_0$

Waist location $\quad (z' - f) = M^2(z - f)$

Depth of focus $\quad 2z_0' = M^2(2z_0)$

Divergence $\quad 2\theta_0' = \dfrac{2\theta_0}{M}$

Magnification $\quad M = \dfrac{M_r}{(1 + r^2)^{1/2}}$

$$r = \frac{z_0}{z - f}, \qquad M_r = \left|\frac{f}{z - f}\right|.$$

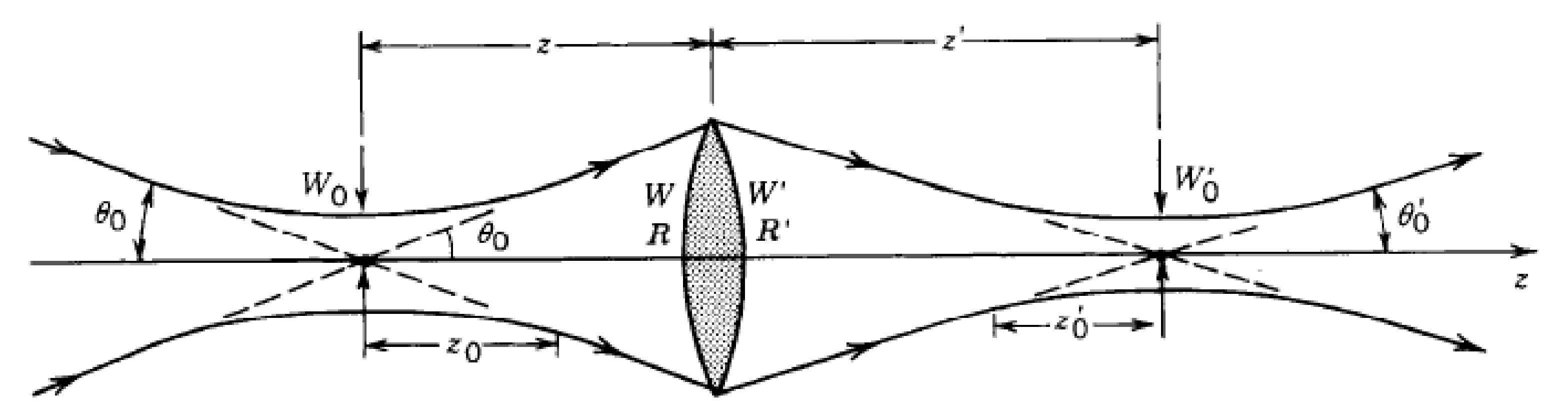
Note-se que:

$W_0'\,\theta_0' = W_0\,\theta_0$

Este produto é invariante com a propagação.

Representa a **Étandue** do feixe laser.

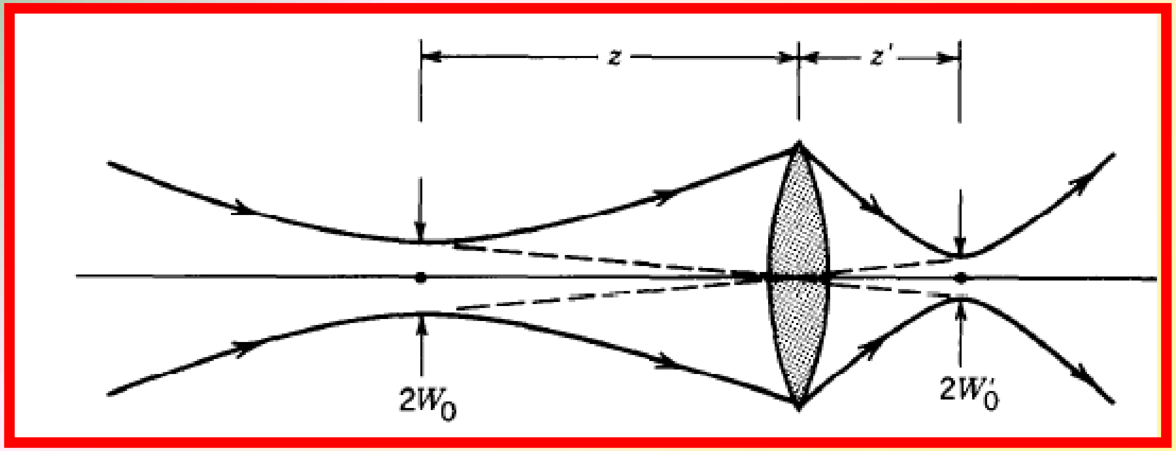
Acção de lentes sobre feixes



Aproximação geométrica: Se (z-f) >> z_0

A lente está bem afastada da cintura (+/-z_0)

A onda pode ser considerada esférica



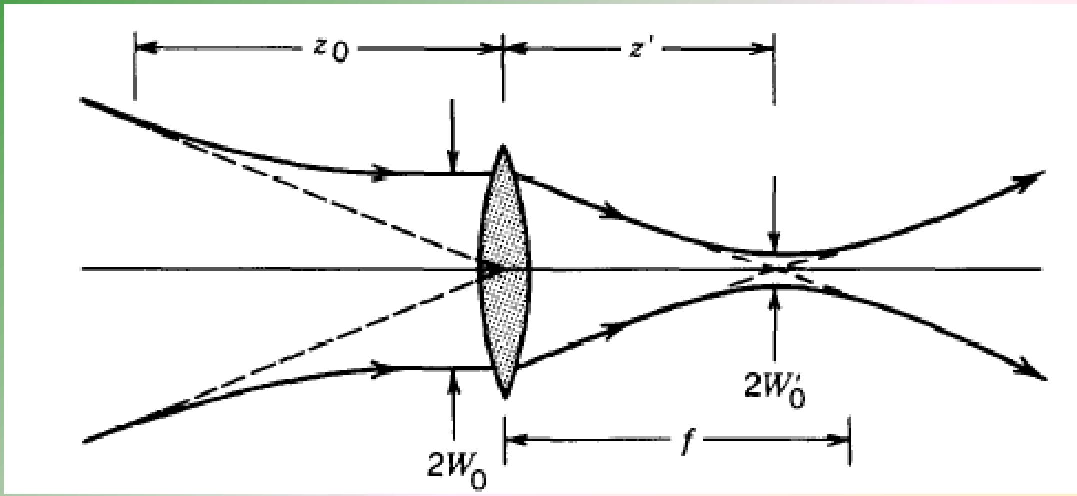
$$W_0' \approx M W_0$$

$$\frac{1}{z'} + \frac{1}{z} \approx \frac{1}{f}$$

$$M \approx M_r = \left| \frac{f}{z-f} \right|.$$

Formatação de feixes

Focagem – lente colocada na cintura (z = 0)



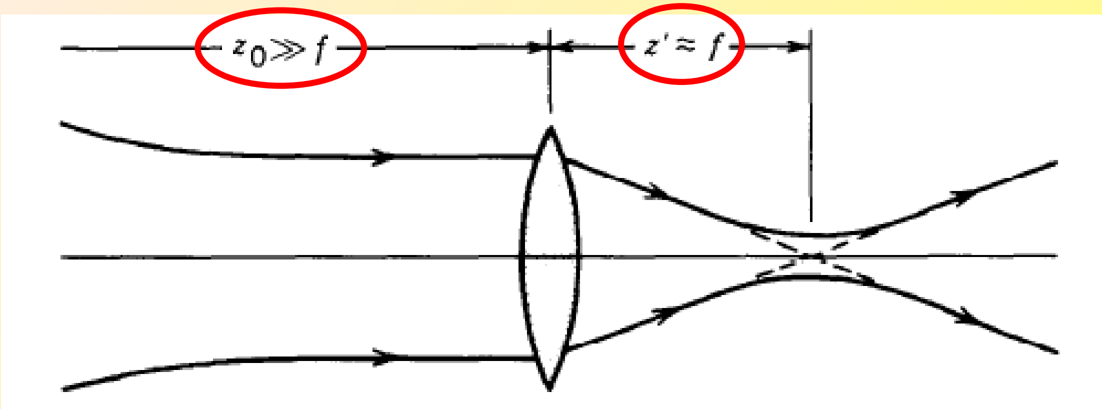
$$W_0' = \frac{W_0}{\left[1 + (z_0/f)^2\right]^{1/2}}$$

$$z' = \frac{f}{1 + (f/z_0)^2}.$$

Se $2z_0$ >> f (focagem de um feixe colimado)

$$W_0' \approx \frac{\lambda}{\pi W_0} f = \theta_0 f$$

$$z' \approx f.$$



Formatação de feixes

Em aplicações tais como

- Laser scanning,
- Impressão laser
- Leitura de CD
- Fusão laser

W'_0 deve ser tão pequeno quanto possível:

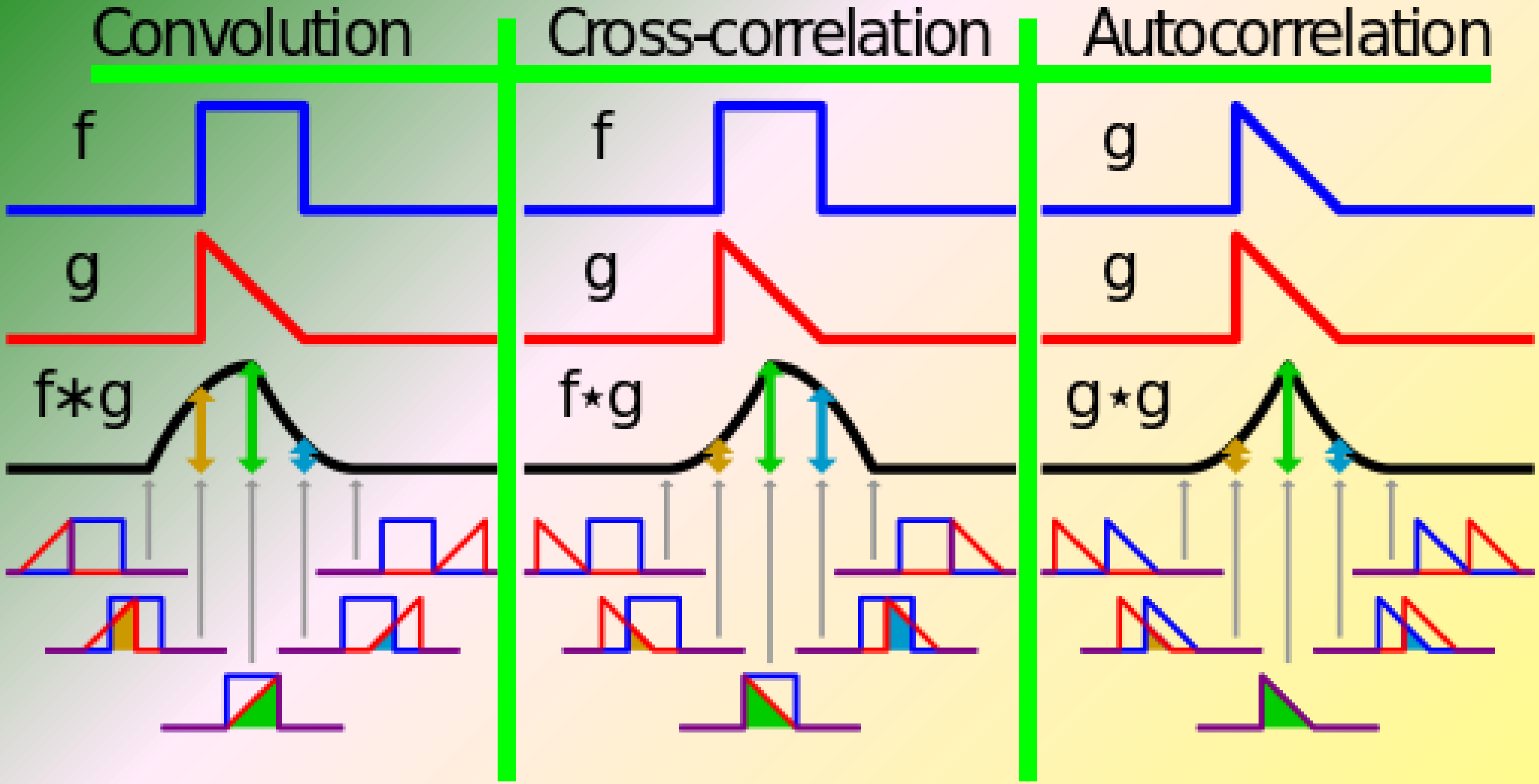
- λ e f tão pequenos quanto possível
- W_0 tão grande quanto possível

Diâmetro **mínimo** da lente de **focagem**: D= 2 W_0**.** Logo:

$$\boxed{2W_0' \approx \frac{4}{\pi}\lambda F_{\#}}$$

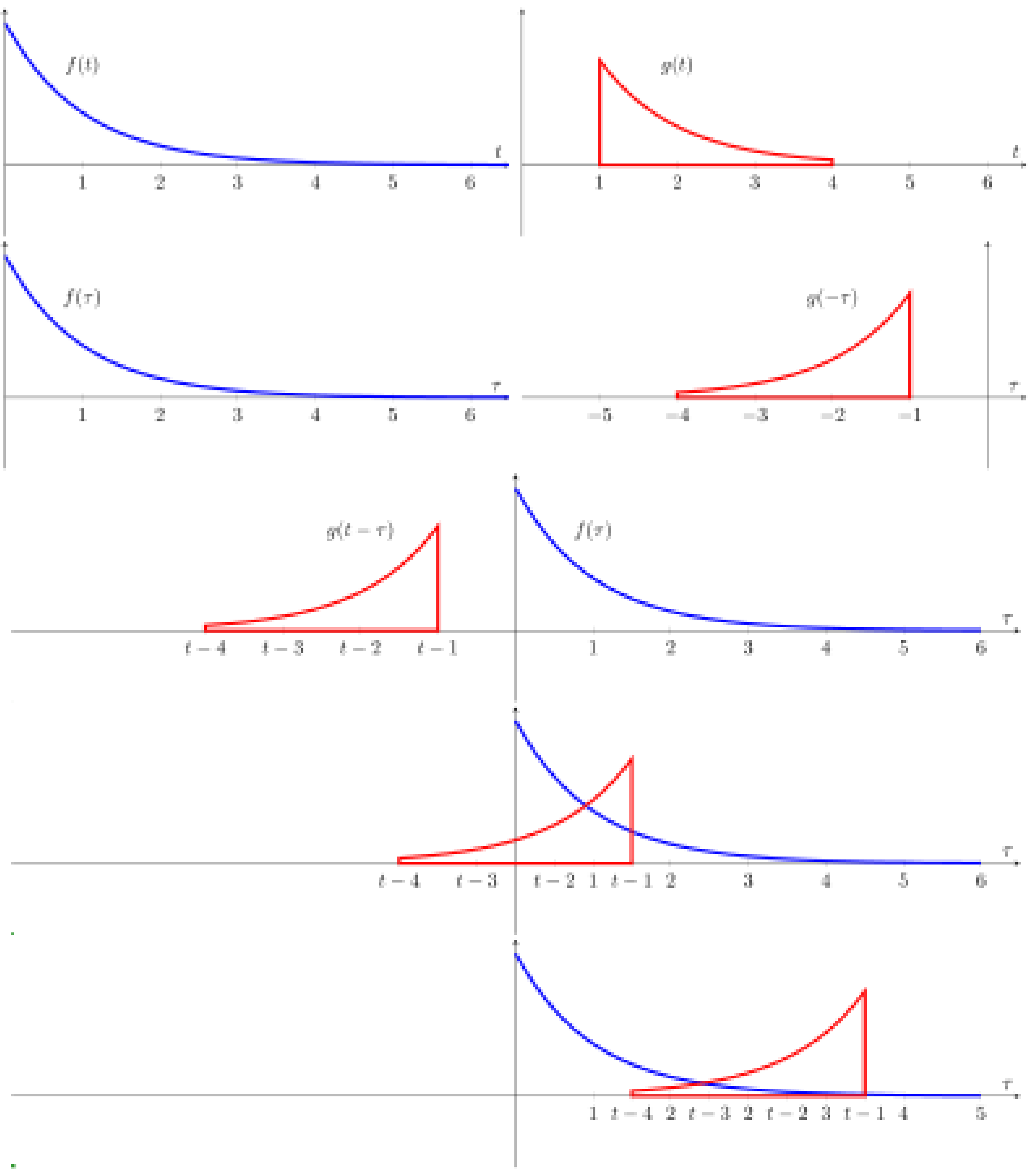
$$\boxed{F_{\#} = \frac{f}{D}}$$

Convolução, correlação (1D)

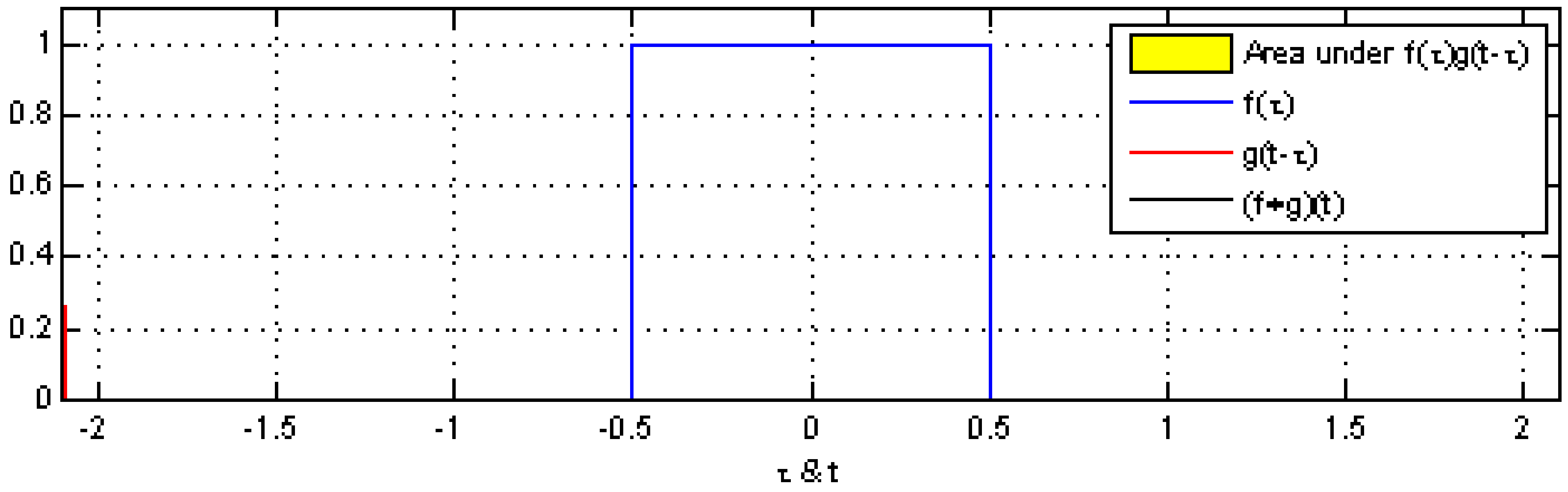


Convolução

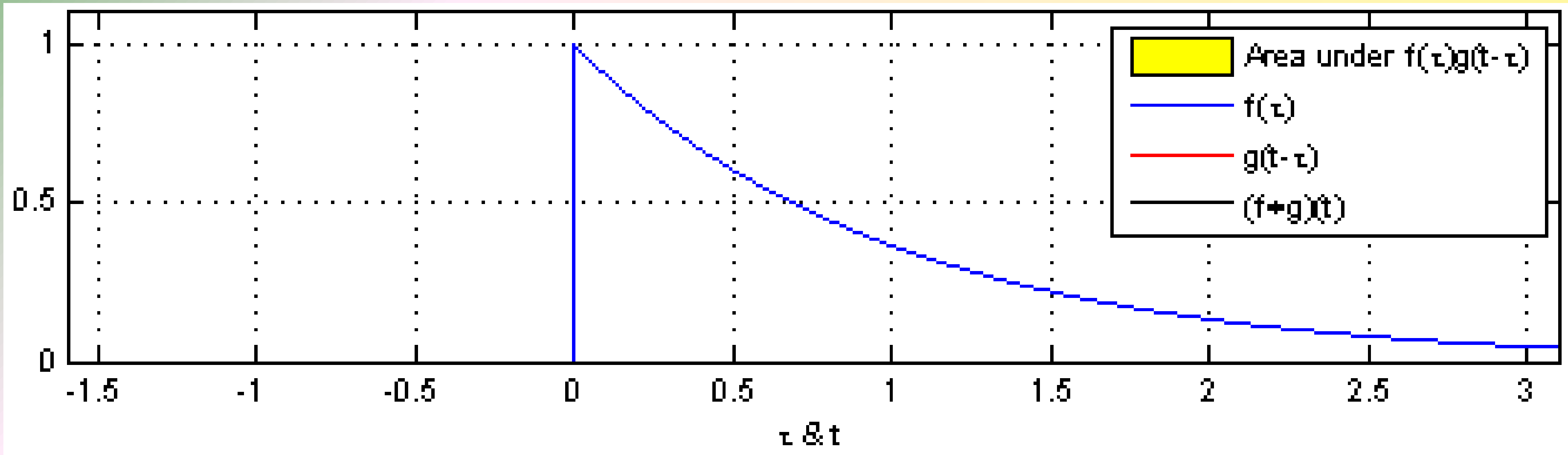
•



Convolução



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
τ & t
Area under f(τ)g(t-τ)
f(τ)
g(t-τ)
(f*g)(t)



1
0.5
0
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
τ & t
Area under f(τ)g(t-τ)
f(τ)
g(t-τ)
(f*g)(t)